

## Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

## Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

## Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: [digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de](mailto:digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de)

# Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen. I

RUDOLF FRITSCH

## Inhalt

Einleitung . . . . .	330
§ 0. Bezeichnungen . . . . .	332
0.1. Monotone Abbildungen . . . . .	333
0.2. Semisimpliziale Mengen . . . . .	333
0.3. Geometrische Realisierung . . . . .	334
§ 1. Standard-Unterteilungsfunktoren . . . . .	335
1.1. Definition . . . . .	335
1.2. Eigenschaften . . . . .	335
1.3. Beispiel I: Normalunterteilung . . . . .	339
1.4. Beispiel II: Natürliche Unterteilung . . . . .	341
1.5. Beispiel III: Gerüsterhaltende Unterteilung . . . . .	346
§ 2. Unterteilung semisimplizialer Mengen . . . . .	348
2.0. Vorbemerkung . . . . .	348
2.1. Äquivalenzklassen von U-Paaren . . . . .	348
2.2. Definition . . . . .	351
2.3. Geometrische Realisierung der Unterteilung . . . . .	351
2.4. Vergleich mit der Unterteilung von CW-Komplexen . . . . .	352
2.5. Verhalten von Fundamentalgruppe und universeller Überlagerung bei Unterteilung . . . . .	354
2.6. Homologie der Unterteilung . . . . .	356
2.7. Erhaltung von schwachen Homotopieäquivalenzen . . . . .	356
§ 3. Nichtentartete semisimpliziale Mengen . . . . .	357
3.1. Definition . . . . .	357
3.2. Seitenähnliche $\Delta$ -Paare . . . . .	357
3.3. Der Funktor $P: S \rightarrow P$ . . . . .	357
3.4. Der Homotopietyp von $PX$ . . . . .	358
3.5. Unterteilung nichtentarteter semisimplizialer Mengen . . . . .	360
3.6. Der Homotopietyp von $UX$ . . . . .	361
§ 4. Natürliche Transformationen . . . . .	361
4.1. Allgemeines . . . . .	361
4.2. Beispiele . . . . .	362
4.3. Ein Hilfssatz . . . . .	362
4.4. Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	363
4.5. Natürliche Transformationen $ ?  \rightarrow  U? $ . . . . .	366
Literatur . . . . .	367

### Einleitung

Diese Arbeit (Teil I und II) verdankt ihre Entstehung einem Fehler in [1]. Dort wird behauptet, die geometrischen Realisierungen einer semisimplizialen Menge und ihrer Normalunterteilung (s. 1.3 und 2.2) seien in natürlicher Weise homöomorph.

Daß diese Aussage, selbst für simpliziale Komplexe, falsch ist, ergibt schon die folgende Tatsache:

*Es gibt keine Homöomorphismen*

$$h_p: |\Delta'[p]| \rightarrow |\Delta[p]| \quad \text{für } p=1, 2$$

( $\Delta[p]$  ist das semisimpliziale Standard- $p$ -Simplex,  $\Delta'[p]$  seine — baryzentrische — Normalunterteilung), so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |\Delta'[2]| & \xrightarrow{h_2} & |\Delta[2]| \\ |\Delta'\sigma_e| \downarrow & & \downarrow |\Delta\sigma_e| \\ |\Delta'[1]| & \xrightarrow{h_1} & |\Delta[1]| \end{array}$$

sowohl für  $e=0$  als auch für  $e=1$  kommutativ ist ( $\sigma_0, \sigma_1$  sind die beiden Entartungsoperatoren  $[2] \rightarrow [1]$ ).

Nun stellten sich zwei Fragen:

I. Existiert, wenn schon kein natürlicher, so doch wenigstens ein mit Inklusionen verträglicher Homöomorphismus? Diese Frage wird in Teil II in einem allgemeineren Zusammenhang durch den Hauptsatz (§ 7) positiv beantwortet. Daraus ergibt sich dann noch auf Grund eines Ergebnisses von Barratt [1] (vgl. dazu auch [5]), daß die geometrische Realisierung jeder semisimplizialen Menge triangulierbar ist.

II. Gibt es eine andere „Unterteilung“ von semisimplizialen Mengen derart, daß die entsprechenden geometrischen Realisierungen in natürlicher Weise homöomorph sind? Auch hierfür bieten wir eine bejahende Antwort an. Diese „natürliche Unterteilung“ (s. 1.4) hat jedoch gegenüber der Normalunterteilung einen wesentlichen Nachteil: Die Symmetrie wird aufgegeben (vgl. Fig. 1 und 2)

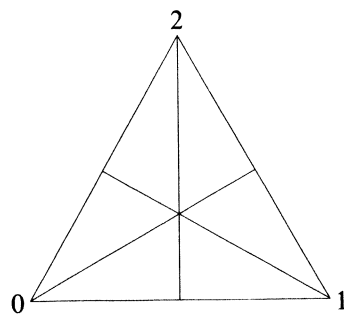


Fig. 1. Normal-Unterteilung  
des 2-Simplexes

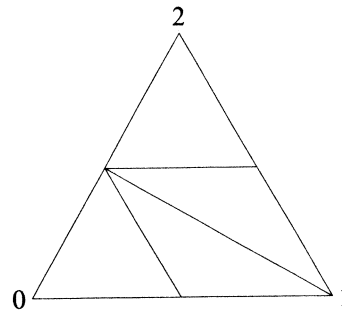


Fig. 2. Natürliche Unterteilung  
des 2-Simplexes

und das hat zur Folge, daß man zwar die Kantsche Konstruktion des Funktors  $\text{Ex}^\infty$  ([10], § 4) übertragen kann, aber bei Anwendung dieses Funktors auf eine beliebige semisimpliziale Menge keine Kanmenge erhält (ein Trichter der in Fig. 3 gezeichneten Art wird nicht gefüllt); also kann die von Kan in [10], § 8

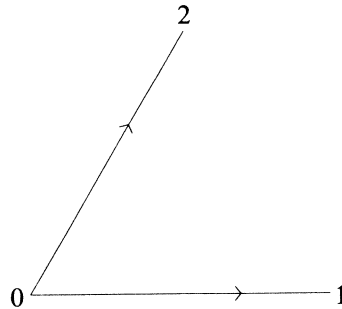


Fig. 3

konstruierte Approximation stetiger Abbildungen durch semisimpliziale Abbildungen nicht analog durchgeführt werden. Man könnte allerdings versuchen, durch Abänderung der bei der Konstruktion von  $\text{Ex}^\infty$  auftretenden natürlichen Transformation von der Unterteilung zur Identität wenigstens soviel Trichter zu füllen, wie es für ein konkretes Approximationsproblem nötig ist, aber es scheint doch unmöglich auf diese Weise eine Kanmenge zu erhalten. Besser kann man die natürliche Unterteilung vielleicht in der Theorie der simplizialen Komplexe anwenden. Hier läßt sich das übliche Approximationsverfahren (s. Schubert [15], III 2.7) übertragen; man muß zwar, um die Approximation durchführen zu können, i.a. die natürliche Unterteilung öfter wiederholen als die Normalunterteilung, da ein  $n$ -Simplex bei der Normalunterteilung in  $(n+1)!$  und bei der natürlichen Unterteilung nur in  $2^n$   $n$ -Simplizes aufgeteilt wird, aber das ist ja für die allgemeine Theorie kein Nachteil. Aus der mangelnden Symmetrie der natürlichen Unterteilung folgt noch, daß ein simplizialer Komplex vor der natürlichen Unterteilung mit einer lokalen Eckenanordnung zu versehen ist. Dann hat man aber noch eine schöne Eigenschaft, die die Normalunterteilung nicht hat: Hat man eine simpliziale Abbildung und versieht man Quelle und Ziel mit einer lokalen Eckenanordnung, die mit der gegebenen Abbildung verträglich ist, so bleibt diese Abbildung bei gleichzeitiger Unterteilung von Quelle und Ziel simplizial.

Aus diesen Fragestellungen entwickelte sich die vorliegende Arbeit. Zunächst war zu klären, was überhaupt unter „Unterteilung“ einer semisimplizialen Menge zu verstehen sei. Eine reine Übertragung des Whiteheadschen Begriffes der Unterteilung von CW-Komplexen (s. 2.4) schied aus, weil darin die Homöomorphie der geometrischen Realisierungen der entsprechenden semisimplizialen Mengen hätte postuliert werden müssen und diese von vorneherein nicht einmal für die Normalunterteilung klar war, während anderer-

seits aus systematischen Gründen die Normalunterteilung auf jeden Fall in einen Unterteilungsbegriff eingeordnet werden sollte<sup>1</sup>. So muß auf diese Bedingung zumindest teilweise verzichtet werden, aber man erwartet doch, daß sie für genügend schöne semisimpliziale Mengen erfüllt ist. Außerdem beschränken wir uns hier auf stetige, funktorielle Unterteilungen („stetig“ ist im Sinne der Funktortheorie gemeint und bedeutet Verträglichkeit mit direkten Limites; die von Barratt in [1] konstruierte Unterteilung, die zu einer Triangulierung der geometrischen Realisierung führt, ist zwar funktoriell, aber nicht stetig; deshalb gehen wir hier nicht genauer darauf ein). Diese sind nach Gabriel-Zisman ([6], II 1.4) durch ihre Werte auf den Standardsimplizes eindeutig bestimmt. Das führt uns zu der Definition des *Standard-Unterteilungsfunktors* in §1. Für solche Unterteilungen der realisierten Standardsimplizes sind dann die Whiteheadschen Bedingungen erfüllt.

In §1 bringen wir dann noch einige Eigenschaften von Standard-Unterteilungsfunktoren und drei Beispiele. In §2 untersuchen wir die von den Standard-Unterteilungsfunktoren induzierte Unterteilung semisimplizialer Mengen, vor allem ihre Verträglichkeit mit anderen Funktoren, z. B. universelle Überlagerung und Homologie. In §3 definieren wir einen Funktor von der Kategorie der semisimplizialen Mengen und semisimplizialen Abbildungen in die Teilkategorie der nicht entarteten semisimplizialen Mengen und nicht entarteten semisimplizialen Abbildungen. Wir benötigen diesen Funktor, um in 3.6 erkennen zu können, daß die geometrischen Realisierungen einer semisimplizialen Menge und ihrer Unterteilung als Objekte der Homotopiekategorie isomorph sind. §4 enthält einige Aussagen darüber, wann dieser Isomorphismus von natürlichen Transformationen in der Kategorie der topologischen Räume herkommt.

Teil II [4] enthält unseren Hauptsatz über die Homöomorphie der geometrischen Realisierungen von semisimplizialen Mengen und gewissen Unterteilungen und seinen Beweis.

Herrn Professor Dr. D. Puppe, Heidelberg, danke ich für viele Gespräche und Anregungen während der Arbeit an [3] und der Vorbereitung dieser Veröffentlichung, die zusammen mit [4] eine etwas gekürzte Fassung von [3] darstellt.

## § 0. Bezeichnungen

In der Literatur über semisimpliziale Mengen hat sich leider noch keine einheitliche Symbolik durchgesetzt<sup>2</sup>. Deswegen werden hier einige der später verwendeten Bezeichnungen zusammengestellt, und zwar nur solche, bei denen einerseits Unklarheit besteht, andererseits aber eine nähere Erläuterung nicht notwendig erscheint.

$\mathbf{N}$  ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.

1. Barratt gibt in [1] eine Definition von „Unterteilungsfunktoren“ („division functor“); die Normalunterteilung ist aber gerade kein Unterteilungsfunktor in seinem Sinn.

2. Ein ausführliches Literaturverzeichnis findet sich in dem Buch von Lamotke [12].

## 0.1. Monotone Abbildungen

$\underline{\Delta}$  ist die (kleine) Kategorie der endlichen geordneten Mengen (Lamotke [12], I 1.1); mit dem gleichen Symbol  $\underline{\Delta}$  bezeichnen wir aber auch die Menge der Morphismen dieser Kategorie.

Morphismen aus  $\underline{\Delta}$  mit besonderer Bedeutung sind

a) die injektiven monotonen Abbildungen

$$\delta_i: [n-1] \rightarrow [n] \quad \text{für } i \in [n],$$

bei denen  $i$  nicht als Bild auftritt,

b) die surjektiven monotonen Abbildungen

$$\sigma_i: [n+1] \rightarrow [n] \quad \text{für } i \in [n],$$

bei denen  $i$  zweimal als Bild auftritt,

c) die injektiven monotonen Abbildungen

$$\varepsilon_i: [0] \rightarrow [n] \quad \text{für } i \in [n],$$

die die 0 auf  $i$  abbilden und

d) die surjektiven monotonen Abbildungen

$$o^n: [n] \rightarrow [0].$$

Ist  $\alpha \in \underline{\Delta}$ , so bezeichnet  $\alpha^+$  den injektiven und  $\alpha^\circ$  den surjektiven Teil von  $\alpha$  (Lamotke [12], I (1.5)).

Ist  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{\Delta}$  und surjektiv, so bezeichnen wir mit  $\hat{\alpha}$  die injektive monotone Abbildung  $[n] \rightarrow [m]$ , die gegeben ist durch

$$\hat{\alpha}(i) = \text{Max } \alpha^{-1}(i) \quad \text{für alle } i \in [n].$$

## 0.2. Semisimpliziale Mengen

Sei  $X$  eine semisimpliziale Menge.

$X_n$  ist die Menge der  $n$ -Simplizes von  $X$  und  $X^n$  das  $n$ -Gerüst. Mit  $X$  bezeichnen wir auch die Vereinigungsmenge aller  $X_n$ . Jedes  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{\Delta}$  induziert bekanntlich eine Abbildung

$$\alpha^*: X_n \rightarrow X_m.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\alpha^*(x) = x \alpha \quad \text{für alle } x \in X_n.$$

Ist  $x \in X$ , so bezeichnet  $x^+$  das nicht entartete Simplex und  $x^\circ$  die surjektive monotone Abbildung der kanonischen Darstellung von  $x$  (Lamotke [12], I 3.9).

$X_n^+$  ist die Menge der nicht entarteten  $n$ -Simplizes,  $X^+$  die Menge aller nicht entarteten Simplizes von  $X$ .

Ist  $Y$  eine beliebige Teilmenge von  $X$ , so ist  $Y^*$  die von  $Y$  erzeugte semisimpliziale Teilmenge von  $X$  (Lamotke [12], I 3.3).

$\underline{S}$  ist die Kategorie der semisimplizialen Mengen und semisimplizialen Abbildungen.

$$\Delta: \underline{A} \rightarrow \underline{S}$$

ist die Einbettung, die jedem Objekt  $[n]$  von  $\underline{A}$  das semisimpliziale Standard- $n$ -Simplex  $\Delta[n]$  (für alle  $n \in \mathbb{N}$ ) und jedem  $\alpha \in \underline{A}$  die semisimpliziale Abbildung  $\Delta\alpha$  zuordnet (Kan [10], § 2).

Sei nun  $X$  wieder eine beliebige semisimpliziale Menge und  $x \in X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$c_x: \Delta[n] \rightarrow X$$

ist die charakteristische Abbildung für  $x$ , d.h. die semisimpliziale Abbildung, die gegeben ist durch

$$c_x(\beta) = x \beta \quad \text{für alle } \beta \in \Delta[n] \subset \underline{A}.$$

### 0.3. Geometrische Realisierung

$\Delta_n$  ist das  $n$ -dimensionale affine Standardsimplex. Wir beschreiben<sup>3</sup> es durch die Punktmenge

$$\left\{ u = (u_0, \dots, u_n) / u_i \in I \text{ für alle } i \in [n], \sum_{i=0}^n u_i = 1 \right\}$$

in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ein  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$  induziert durch die Festsetzung

$$b_i \mapsto b'_{\alpha(i)} \quad \text{für alle } i \in [m]$$

eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , wobei  $(b_i / i \in [m])$  die natürliche Basis des  $\mathbb{R}^{m+1}$  und  $(b'_i / i \in [n])$  die des  $\mathbb{R}^{n+1}$  bedeutet. Die Einschränkung dieser Abbildung auf  $\Delta_m$  induziert die stetige Abbildung

$$|\Delta\alpha|: \Delta_m \rightarrow \Delta_n.$$

Sei nun  $X$  eine semisimpliziale Menge. Die geometrische Realisierung  $|X|$  von  $X$  entsteht aus der topologischen Summe

$$\mathfrak{F}X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta_n$$

( $X_n$  diskret) durch die Identifizierungen

$$(x \alpha, v) \sim (x, |\Delta\alpha| v)$$

für alle  $x \in X_n$ ,  $v \in \Delta_m$ ,  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$ . Wir werden außerdem den Teilraum

$$\mathfrak{F}^+X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^+ \times \Delta_n$$

von  $\mathfrak{F}X$  benötigen.

3. Diese Beschreibung von  $\Delta_n$  geht zurück auf die „Methode der koordinierten Koeffizienten“ von K. W. Feuerbach (s. [2] S. 6/7).

Ist  $x \in X_n$  und  $u \in \Delta_n$ , so ist  $|x, u|$  der von  $(x, u)$  repräsentierte Punkt von  $|X|$ ;  $|x|$  ist die abgeschlossene Zelle

$$\{|x, u|/u \in \Delta_n\}$$

von  $|X|$ ; ist  $n=0$ , so schreiben wir auch  $|x|$  anstelle von  $|x, (1)|$  für den einzigen Punkt der Zelle  $|x|$ .

## § 1. Standard-Unterteilungsfunktoren

### 1.1. Definition

Ein *Standard-Unterteilungsfunktor* ist ein Paar  $(U, u)$ , bestehend aus einem Funktor

$$U: \underline{\Delta} \rightarrow \underline{S}$$

und einer Familie

$$u = (u_p/p \in \mathbb{N}),$$

so daß gilt:

- a) für jedes  $p \in \mathbb{N}$  sind  $|U[p]|$  und  $\Delta_p$  homöomorph, jedes  $u_p$  ist ein Homöomorphismus  $|U[p]| \rightarrow \Delta_p$ ;
- b) für alle injektiven  $\gamma: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{\Delta}$  ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |U[p]| & \xrightarrow{u_p} & \Delta_p \\ |U\gamma| \downarrow & & \downarrow |\Delta\gamma| \\ |U[q]| & \xrightarrow{u_q} & \Delta_q \end{array}$$

kommutativ.

Wir werden im folgenden auch das Paar  $(U, u)$  einfach mit „ $U$ “ bezeichnen. Außerdem werden wir immer annehmen, daß wir  $|U[p]|$  und  $\Delta_p$  vermöge  $u_p$  identifiziert haben; dann bedeutet b) nichts anderes als

$$|U\gamma| = |\Delta\gamma| \quad (1.1)$$

für alle injektiven  $\gamma \in \underline{\Delta}$ .

*Bemerkung.* Die Menge der Standard-Unterteilungsfunktoren ist nicht leer: Zu  $\Delta$  gibt es offensichtlich ein  $u$ , so daß  $(\Delta, u)$  ein Standard-Unterteilungsfunktor ist! In 1.3 – 1.5 finden sich weitere Elemente dieser Menge.

### 1.2. Eigenschaften

$U$  sei ein fester Standard-Unterteilungsfunktor.

**Lemma 1.** Sei  $\gamma \in \underline{\Delta}$ ;  $U\gamma$  ist genau dann injektiv (surjektiv), wenn  $\gamma$  injektiv (surjektiv) ist.

*Beweis.* Ist  $\gamma$  injektiv (surjektiv), so gibt es in  $\underline{\Delta}$  ein Links- (Rechts-) Inverses  $\bar{\gamma}$  zu  $\gamma$ . Da  $U$  ein Funktor ist, ist dann auch  $U\bar{\gamma}$  Links- (Rechts-) Inverses zu  $U\gamma$  in  $\underline{S}$ .



Umgekehrt sei  $U\gamma$  injektiv. Wegen

$$U\gamma = U(\gamma^+ \gamma^\circ) = (U\gamma^+) \circ (U\gamma^\circ)$$

muß  $U\gamma^\circ$  auch injektiv sein. Da  $\gamma^\circ$  surjektiv ist, folgt aus dem obigen, daß  $U\gamma^\circ$  sogar bijektiv ist. Damit ist auch  $|U\gamma^\circ|$  bijektiv und ein Homöomorphismus. Also muß die Dimension der Quelle von  $|U\gamma^\circ|$  gleich der Dimension des Zieles von  $|U\gamma^\circ|$  sein. Das bedeutet aber, daß Quelle und Ziel von  $\gamma^\circ$  gleich sind, und aus der Surjektivität von  $\gamma^\circ$  folgt

$$\gamma^\circ = \text{id}[\dim \gamma],$$

d.h.  $\gamma$  ist injektiv.

Analog folgt aus der Surjektivität von  $U\gamma$  die Surjektivität von  $\gamma$ .

*Bemerkung.* Zum Beweis von Lemma 1 wurde die Bedingung b) aus 1.1 nicht benutzt. Das zeigt, daß es bei dieser Bedingung nicht auf die sich daraus natürlich auch ergebende Injektivität von  $|U\gamma|$  ankommt, sondern nur auf die Verträglichkeit mit der kanonischen Zellenstruktur von  $\Delta_p$ . Es würde deshalb genügen, anstelle von b) zu verlangen:

$$u_q(\text{Bild } |U\gamma|) \subset \text{Bild } |\Delta\gamma| = |\gamma|,$$

denn dann könnte man immer  $u$  so abändern, daß b) erfüllt ist. ( $|\gamma|$  bezeichnet die Zelle von  $\Delta_p$ , die dem nicht entarteten Simplex  $\gamma \in \Delta[p]$  in der kanonischen Zellenzerlegung von  $\Delta_p$  entspricht; die Identifizierung von  $|U[p]|$  und  $\Delta_p$  induziert eine weitere Zellenzerlegung von  $\Delta_p$ !)

**Lemma 2.** Sei  $\gamma: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{\Delta}$  injektiv. Dann gilt für alle  $\mu \in U[q]$ :

$$\mu \in \text{Bild } U\gamma \Leftrightarrow |\mu| \subset |\gamma| \quad (= \text{Bild } |U\gamma|). \quad (2.1)$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: trivial.

„ $\Leftarrow$ “: Aus  $|\mu| \subset \text{Bild } |U\gamma|$  folgt

$$|\mu| = |U\gamma|(|U\gamma|^{-1}(|\mu|)). \quad (2.2)$$

Wir wählen nun ein  $\bar{\gamma}: [q] \rightarrow [p]$  aus  $\underline{\Delta}$  mit

$$\bar{\gamma}\gamma = \text{id}[p]; \quad (2.3)$$

das ist möglich, da  $\gamma$  nach Voraussetzung injektiv ist. Dann haben wir wegen (2.2) und (2.3):

$$|(U\gamma\bar{\gamma})\mu| = |\mu|.$$

Das ist aber gleichbedeutend mit

$$((U\gamma\bar{\gamma})\mu)^+ = \mu^+. \quad (2.4)$$

Nach Lemma 1 ist  $U\gamma$  auch injektiv, woraus folgt

$$((U\gamma\bar{\gamma})\mu)^+ = U\gamma(U\bar{\gamma}\mu)^+. \quad (2.5)$$

Aus (2.4) und (2.5) ergibt sich nun:

$$\mu = U\gamma((U\bar{\gamma}\mu)^+ \mu^\circ),$$

d.h.

$$\mu \in \text{Bild } U\gamma.$$

**Definition.** Ein Simplex  $\mu \in U[q]$  ist ein *inneres Simplex* (von  $U[q]$ ), wenn es kein injektives, von  $\text{id}[q]$  verschiedenes  $\gamma \in \underline{A}$  mit  $\mu \in \text{Bild } U\gamma$  gibt.

Diese Definition wird gerechtfertigt durch

**Lemma 3.**  $\mu \in U[q]$  ist genau dann inneres Simplex, wenn  $|\mu|$  innere Punkte von  $\Delta_q$  enthält; genauer: wenn die „inneren“ Punkte von  $|\mu|$  auch innere Punkte von  $\Delta_q$  sind.

*Beweis.* Enthält  $|\mu|$  innere Punkte von  $\Delta_q$ , so folgt aus Lemma 2, daß  $\mu$  inneres Simplex von  $U[q]$  ist. Enthalte nun  $|\mu|$  keine inneren Punkte von  $\Delta_q$  und sei  $u$  innerer Punkt von  $\Delta_{\dim \mu}$ . Dann ist  $|\mu, u|$  ein Randpunkt von  $\Delta_q$  und es gibt ein injektives, von  $\text{id}[q]$  verschiedenes  $\gamma: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{A}$ , sowie einen inneren Punkt  $w \in \Delta_p$  mit

$$|\mu, u| = |\Delta \gamma|(w).$$

Nun gibt es aber auch noch ein nicht entartetes  $v \in U[p]$  und einen inneren Punkt  $v \in \Delta_{\dim v}$  mit

$$w = |v, v|.$$

Damit berechnen wir

$$|\mu^+, (\Delta \mu^\circ | u)| = |\mu, u| = |\Delta \gamma|(w) = |U\gamma|(|v, v|) = |U\gamma v, v|.$$

Da  $U\gamma$  injektiv ist, ist auch  $U\gamma v$  nicht entartet und es folgt

$$\mu^+ = U\gamma v;$$

daraus ergibt sich schließlich:

$$\mu \in \text{Bild } U\gamma.$$

**Folgerung.** Ist  $\mu$  inneres Simplex von  $U[q]$ , so auch  $\mu\alpha$  für alle surjektiven  $\alpha \in \underline{A}$ , für die  $\mu\alpha$  definiert ist.

*Beweis.* Das ergibt sich aus dem voranstehenden Lemma, da für surjektives  $\alpha$  gilt:

$$|\mu| = |\mu^+| = |\mu\alpha|.$$

Analog zu dem Lemma in Lamotke [12] I 2.3 gilt:

**Lemma 4.** Zu jedem  $\mu \in U[q]$  gibt es genau eine natürliche Zahl  $p \leq q$ , ein inneres Simplex  $\mu_+ \in U[p]$  und ein injektives  $\mu_\times: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{A}$ , so daß gilt

$$\mu = U\mu_\times \mu_+. \quad (2.6)$$

(Im folgenden sollen bei gegebenem  $\mu \in U[q]$  die Symbole  $\mu_+$  und  $\mu_\times$  immer die in diesem Lemma festgelegten Bedeutungen haben.)

*Beweis.* Sei  $\mu_\times$  eine injektive monotone Abbildung kleinster Dimension, für die gilt:

$$\mu \in \text{Bild } U\mu_\times,$$

und sei

$$\mu_+ = (U\mu_\times)^{-1} \mu.$$

$\mu_+$  ist wegen der Injektivität von  $U\mu_*$  durch  $\mu$  und  $\mu_*$  eindeutig bestimmt und offensichtlich ein inneres Simplex von  $U[\dim \mu_*]$ . Also bleibt die Eindeutigkeit von  $\mu_*$  zu zeigen, denn dann ist auch die Existenz und Eindeutigkeit von

$$p = \dim \mu_* \quad (2.7)$$

klar.

Dazu sei  $\gamma: [r] \rightarrow [q]$  eine weitere injektive monotone Abbildung, derart, daß ein inneres Simplex  $v \in U[r]$  mit

$$\mu = U\gamma v \quad (2.8)$$

existiert. Dann folgt mit Hilfe von (1.1):

$$|\mu| \subset (\text{Bild } |U\mu_*| \cap \text{Bild } |U\gamma|) = (|\mu_*| \cap |\gamma|).$$

Also ist

$$(|\mu_*| \cap |\gamma|) \neq \emptyset$$

und, da die von  $|\Delta[q]|$  induzierte Zellenzerlegung von  $\Delta_q$  als Triangulierung aufgefaßt werden kann, existiert ein nicht entartetes  $\delta \in \Delta[q]$  mit

$$|\mu| \subset |\delta| = (|\mu_*| \cap |\gamma|); \quad (2.9)$$

ein solches  $\delta$  ist aber eine injektive monotone Abbildung, und aus Lemma 2 folgt

$$\mu \in \text{Bild } U\delta.$$

Nach der Wahl von  $\mu_*$  (und (2.7)) ist

$$\dim \delta \geq p.$$

Daraus folgt aber, da  $\delta$  nach (2.9) Seite von  $\mu_*$  ist:

$$\mu_* = \delta. \quad (2.10)$$

Aus (2.9) ergibt sich außerdem die Existenz eines injektiven  $\bar{\gamma} \in \underline{\Delta}$  mit

$$\delta = \gamma \bar{\gamma}. \quad (2.11)$$

Damit berechnen wir unter Verwendung von (2.11), (2.10) und (2.8):

$$(U\gamma \bar{\gamma}) \mu_+ = U\gamma v.$$

Aus der Injektivität von  $\gamma$  und Lemma 1 folgt nun

$$U\bar{\gamma} \mu_+ = v.$$

Da  $v$  inneres Simplex und  $\bar{\gamma}$  injektiv sein sollte, haben wir

$$\bar{\gamma} = \text{id } [p]$$

und aus (2.10) und (2.11) ergibt sich

$$\mu_* = \gamma.$$

Wir notieren noch die folgenden

*Rechenregeln.* a) Ist  $\mu \in U[p]$  und  $\beta: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{A}$ , so gilt

$$(U \beta \mu)_{\times} = \beta^+ (U \beta^{\circ} \mu)_{\times} \quad (2.12)$$

und

$$(U \beta \mu)_+ = (U \beta^{\circ} \mu)_+. \quad (2.13)$$

b) Ist  $\mu \in (U[p])_n$  und  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$  surjektiv, so ist

$$(\mu \alpha)_+ = \mu_+ \alpha \quad (2.14)$$

und

$$(\mu \alpha)_{\times} = \mu_{\times} \alpha. \quad (2.15)$$

Trivial ist das folgende

**Lemma 5.**  $U[p]$  wird von seinen nicht entarteten  $p$ -Simplizes erzeugt.

### 1.3. Beispiel I: Normalunterteilung

a) Die (baryzentrische) Normalunterteilung hat man bereits früher bei der Untersuchung der simplizialen Komplexe betrachtet (s. z.B. Seifert-Threlfall [16] §13 oder Hilton-Wylie [8] 1.4). Für semisimpliziale Mengen wurde sie von Kan (in [10] §2) beschrieben; wir verwenden seine Bezeichnungen, insbesondere das Symbol „ $\Delta$ “ für den Funktor  $\underline{A} \rightarrow \underline{S}$ .

b) Wir definieren zunächst die *semisimpliziale Menge*  $\Delta'[p]$  durch

$n$ -Simplizes von  $\Delta'[p]$  sind alle  $(n+1)$ -gliedrigen Folgen

$$\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n)$$

von nicht entarteten Simplizes  $\mu_i \in \Delta[p]$ , für die gilt: Zu jedem Paar  $i, j \in \mathbb{N}$  mit

$$0 \leq i \leq j \leq n \quad (3.1)$$

gibt es ein  $\mu_{ji} \in \underline{A}$  mit

$$\mu_i = \mu_j \mu_{ji}. \quad (3.2)$$

(Äquivalent zu dieser Bedingung ist: Jedes  $\mu_i$  ist Seite von  $\mu_j$  für alle  $j$  mit (3.1), d. h.

$$\text{Bild } \mu_0 \subset \text{Bild } \mu_1 \subset \dots \subset \text{Bild } \mu_n,$$

wenn man alle  $\mu_i$  als monotone Abbildungen interpretiert. Aus (3.2) ergibt sich noch, daß alle  $\mu_{ji}$  injektiv sind.)

Ist  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$ , so ist

$$\mu \alpha = (\mu_0, \dots, \mu_n) \alpha = (\mu_{\alpha(0)}, \dots, \mu_{\alpha(m)}). \quad (3.3)$$

Damit ist  $\Delta'[p]$  vollständig beschrieben, aber noch nicht der Funktor  $\Delta'$ . Dazu fehlt noch die Festsetzung:

Ist  $\gamma: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{A}$ , so ist

$$\Delta' \gamma: \Delta'[p] \rightarrow \Delta'[q]$$

gegeben durch

$$\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n) \mapsto ((\gamma \mu_0)^+, \dots, (\gamma \mu_n)^+). \quad (3.4)$$

c) Wir haben nun für jedes  $p \in \mathbb{N}$  einen Homöomorphismus

$$u_p: |\Delta'[p]| \rightarrow \Delta_p$$

so anzugeben, daß nach der Identifizierung von  $|\Delta'[p]|$  und  $\Delta_p$  vermöge  $u_p$  (1.1) gilt. Das geschieht in der bekannten Weise (s. z. B. Hilton-Wylie l.c.) dadurch, daß wir für jedes 0-Simplex  $\mu = (\mu_0) \in \Delta'[p]$  die euklidischen Koordinaten von  $u_p|\mu|$  definieren durch

$$(u_p|\mu|)_i = \begin{cases} \frac{1}{\dim \mu_0 + 1} & \text{falls } i \in \text{Bild } \mu_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.5)$$

(für alle  $i \in [p]$ ) und setzen

$$u_p|\mu, u| = \sum_{i=0}^n u_i u_p|\mu_i| \quad (3.6)$$

für alle  $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n) \in \Delta'[p]$  und  $u = (u_0, \dots, u_n) \in \Delta_n$ .

Identifiziert man nun  $|\Delta'[p]|$  und  $\Delta_p$  vermöge  $u_p$  (für jedes  $p \in \mathbb{N}$ ), so rechnet man die Gültigkeit von (1.1) für injektive  $\gamma \in \underline{\Delta}$  sofort nach.

Es ist aber auch klar, daß für surjektive  $\gamma \in \underline{\Delta}$  i. a.

$$|\Delta' \gamma| \neq |\Delta \gamma|$$

ist. Man betrachte als Beispiel

$$\gamma = \sigma_0: [2] \rightarrow [1]$$

und

$$|\mu| = |(\text{id}[2])| = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \Delta_2,$$

dann gilt nämlich:

$$|\Delta \gamma|(|\mu|) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

und

$$|\Delta' \gamma|(|\mu|) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = |(\text{id}[1])| \quad (\in \Delta_1).$$

d) Ist  $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in \Delta'[p]$  nicht entartet, so gilt

$$\dim \mu_i = i \quad \text{für alle } i \in [p].$$

(Insbesondere hat man natürlich hier

$$\mu_p = \text{id}[p].)$$

Die nicht entarteten  $p$ -Simplizes von  $\Delta'[p]$  entsprechen eineindeutig den Permutationen von  $[p]$ : Wir ordnen  $\mu$  die Permutation  $\varphi_\mu$  zu, die charakterisiert ist durch

$$\{\varphi_\mu(0)\} = \text{Bild } \mu_0,$$

$$\{\varphi_\mu(i+1)\} = \text{Bild } \mu_{i+1} - \text{Bild } \mu_i \quad \text{für alle } i \in [p-1].$$

Diese Tatsache werden wir später (in 6.4) günstig anwenden können.

## 1.4. Beispiel II: Natürliche Unterteilung

a) Wir nennen den Standard-Unterteilungsfunktor  $\Delta^\vee$ , den wir im folgenden definieren werden, „natürliche Unterteilung“, weil (nach der Identifizierung von  $|\Delta^\vee[p]|$  und  $\Delta_p$  für alle  $p \in \mathbb{N}$ ) die Gl.(1.1) nicht nur für die injektiven, sondern für alle  $\gamma \in \underline{A}$  gilt; daraus folgt nämlich, daß  $(\text{id } \Delta_p / p \in \mathbb{N})$  eine natürliche Äquivalenz der Funktoren  $|\Delta^\vee?|$  und  $|\Delta?|$  ist.

b) Wir definieren nun die semisimpliziale Menge  $\Delta^\vee[p]$ :

$n$ -Simplizes von  $\Delta^\vee[p]$  sind alle  $(n+1)$ -gliedrigen Folgen

$$\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n)$$

von Zahlenpaaren

$$\mu_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad (4.1)$$

(für alle  $i \in [n]$ ), so daß gilt

$$0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_0 \leq b_0 \leq \dots \leq b_n \leq p. \quad (4.2)$$

Ist  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$ , so ist

$$\mu \alpha = (\mu_0, \dots, \mu_n) \alpha = (\mu_{\alpha(0)}, \dots, \mu_{\alpha(m)}). \quad (4.3)$$

Ein Funktor wird  $\Delta^\vee$  nun durch die Festsetzung:

Ist  $\gamma: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{A}$ , so ist

$$\Delta^\vee \gamma: \Delta^\vee[p] \rightarrow \Delta^\vee[q]$$

gegeben durch

$$\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n) = ((a_0, b_0), \dots, (a_n, b_n)) \mapsto ((\gamma a_0, \gamma b_0), \dots, (\gamma a_n, \gamma b_n)). \quad (4.4)$$

c) Nützlich für das Folgende ist noch eine andere Darstellung von  $\Delta^\vee[p]$ : Die Zellerzerlegung von  $|\Delta^\vee[p]|$  läßt sich als Triangulation von  $\Delta_p$  auffassen. Den zugehörigen (abstrakten) simplizialen Komplex  $\mathfrak{D}_p$  kann man folgendermaßen beschreiben: Ecken von  $\mathfrak{D}_p$  sind die Zahlenpaare

$$(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

für die gilt

$$0 \leq a \leq b \leq p. \quad (4.5)$$

Es ist klar, daß die Menge  $\mathfrak{E}_p$  der Ecken von  $\mathfrak{D}_p$  im wesentlichen die Menge  $(\Delta^\vee[p])_0$  ist. Die Festsetzung

$$(a, b) \leq (\bar{a}, \bar{b}) \Leftrightarrow \bar{a} \leq a \leq b \leq \bar{b}$$

liefert eine Teilordnung für  $\mathfrak{E}_p$ . Die Simplizes von  $\mathfrak{D}_p$  sind dann die nichtleeren, vollständig geordneten Teilmengen von  $\mathfrak{E}_p$ .  $\mathfrak{D}_p$  ist also ein geordneter simplizialer Komplex und es gilt

$$O'(\mathfrak{D}_p) = \Delta^\vee[p],$$

wobei  $O'$  die von Puppe in [14] §1 Beispiel 2 beschriebene Einbettung der Kategorie der geordneten simplizialen Komplexe und ordnungserhaltenden Abbildungen in  $\underline{S}$  bedeutet.

d) Um die Homöomorphismen  $u_p: |\Delta^\vee[p]| \rightarrow \Delta_p$  konstruieren zu können, benötigen wir noch weitere Eigenschaften von  $\Delta^\vee[p]$ .

i)  $\Delta^\vee[p]$  wird von seinen nicht entarteten  $p$ -Simplizes erzeugt! (Das folgt nicht automatisch aus 1.2 Lemma 5, da wir ja erst beweisen müssen, daß  $\Delta^\vee$  ein Standard-Unterteilungsfunktor ist.)

*Beweis.* Man sieht das am leichtesten mit Hilfe des in c) betrachteten simplizialen Komplexes  $\mathfrak{D}_p$  ein. Man hat dann zu zeigen, daß jedes (geordnete) Simplex von  $\mathfrak{D}_p$  Seite eines (geordneten)  $p$ -Simplexes ist. Betrachten wir dazu ein geordnetes  $n$ -Simplex

$$m = ((a_i, b_i)/i \in [n])$$

von  $\mathfrak{D}_p$ . Da  $m$  geordnet ist, ist die Abbildung  $\alpha: [n] \rightarrow [p]$ , die durch

$$\alpha(i) = b_i - a_i \quad \text{für alle } i \in [n]$$

gegeben ist, monoton und injektiv. Daraus folgt unmittelbar

$$n = \dim m \leq p$$

und man erkennt leicht, daß man  $m$  als  $\alpha$ -te Seite eines geordneten  $p$ -Simplexes  $\bar{m}$  darstellen kann. (Man definiere

$$\bar{a}_j = \begin{cases} a_0 & \text{für } 0 \leq j \leq \alpha(0) \\ \text{Max}(b_{k-1} - j, a_k) & \text{für } \alpha(k-1) \leq j \leq \alpha(k) \text{ und } 1 \leq k \leq n \\ \text{Max}(b_n - j, 0) & \text{für } \alpha(n) \leq j \leq p, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\bar{b}_j = \bar{a}_j + j$$

und damit

$$\bar{m} = ((\bar{a}_i, \bar{b}_i)/i \in [p]).$$

ii) Die geordneten  $p$ -Simplizes von  $\mathfrak{D}_p$ , d.h. die nicht entarteten  $p$ -Simplizes von  $\Delta^\vee[p]$ , sind durch (4.6) charakterisiert. Ist

$$m = ((a_i, b_i)/i \in [p])$$

ein geordnetes  $p$ -Simplex von  $\mathfrak{D}_p$ , so gilt insbesondere

$$a_0 = b_0$$

und für alle  $i \in [p-1]$

$$a_i = a_{i+1} \Leftrightarrow b_i \neq b_{i+1}.$$

Wir setzen

$$\varphi_m(0)_{\text{Def}} = a_0 \quad (= b_0)$$

und für alle  $i \in [p-1]$

$$\varphi_m(i+1)_{\text{Def}} = \begin{cases} a_{i+1} & \text{falls } a_i \neq a_{i+1} \\ b_{i+1} & \text{sonst,} \end{cases}$$

damit erhalten wir eine Permutation  $\varphi_m$  von  $[p]$ .  $m$  ist durch  $\varphi_m$  eindeutig bestimmt, aber es gibt nicht zu jeder Permutation  $\varphi$  von  $[p]$  ein geordnetes  $p$ -Simplex  $m \in \mathfrak{D}_p$  mit

$$\varphi = \varphi_m. \quad (4.7)$$

Ist  $\varphi$  eine Permutation von  $[p]$ , so gibt es genau dann ein geordnetes  $p$ -Simplex  $m \in \mathfrak{D}_p$  mit (4.7), wenn

$$\varphi(j) = \begin{cases} \text{Max } \{\varphi(i)/i < j\} + 1 \\ \text{oder} \\ \text{Min } \{\varphi(i)/i < j\} - 1 \end{cases} \quad \text{für } 0 < j \leq p \quad (4.8)$$

ist.

(Diese „schwächere“ Korrespondenz zwischen nicht entarteten  $p$ -Simplizes und Permutationen von  $[p]$ , ist ein wesentlicher Nachteil der natürlichen Unterteilung gegenüber der Normalunterteilung [vgl. 1.3 d)], der sich vor allem bei Approximationsfragen auswirkt.)

iii) Wir ordnen jeder Ecke

$$e = (a, b)$$

von  $\mathfrak{D}_p$  das 1-Simplex  $\check{e}: [1] \rightarrow [p]$  aus  $\Delta[p]$  zu, das durch

$$\check{e}(0) = a, \quad \check{e}(1) = b$$

beschrieben ist. Damit erhalten wir eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Ecken von  $\mathfrak{D}_p$  und den 1-Simplizes von  $\Delta[p]$ .

e) Um den benötigten Homöomorphismus  $u_p$  zu konstruieren, fassen wir  $\mathfrak{D}_p$  als geometrischen simplizialen Komplex über dem  $|\Delta^\vee[p]|$  zugrundeliegenden topologischen Raum auf. Dann definieren wir  $u_p$  als stetige Abbildung  $\mathfrak{D}_p \rightarrow \Delta_p$  auf den Ecken  $e$  von  $\mathfrak{D}_p$  durch

$$u_p(e) = |\check{e}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})| \in |\Delta[p]| = \Delta_p \quad (4.9)$$

und im Inneren der Simplizes von  $\mathfrak{D}_p$  durch lineare Fortsetzung. Offensichtlich wird bei dieser Definition das Diagramm in 1.1 b) für alle  $\gamma: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{A}$  kommutativ (nicht nur für die injektiven). Wir haben aber noch zu zeigen, daß dieses  $u_p$  ein Homöomorphismus ist; dazu genügt der Nachweis der Bijektivität.

i) Die Injektivität von  $u_p$  ergibt sich folgendermaßen: Nach d), i) können wir jeden Punkt von  $\mathfrak{D}_p$  in der Form

$$\sum_{i=0}^p u_i e_i$$

mit

$$(u_0, \dots, u_p) \in \Delta_p$$

und

$$e_0 < e_1 < \dots < e_p$$

darstellen. Sei nun

$$u_p \left( \sum_{i=0}^p u_i e_i \right) = u_p \left( \sum_{i=0}^p \bar{u}_i \bar{e}_i \right),$$

d.h.

$$\sum_{i=0}^p u_i u_p(e_i) = w = \sum_{i=0}^p \bar{u}_i u_p(\bar{e}_i) \quad (4.10)$$



( $w \in \mathbf{R}^{p+1}$  ist durch (4.10) definiert). Dann beweisen wir durch absteigende Induktion

$$u_n = \bar{u}_n \quad (4.11)$$

und

$$e_n \neq \bar{e}_n \Rightarrow u_n = 0 (= \bar{u}_n). \quad (4.12)$$

Nun sind

$$(e_0, \dots, e_p), (\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_p)$$

geordnete  $p$ -Simplizes von  $\mathfrak{D}_p$ ;  $\varphi, \bar{\varphi}$  seien die ihnen gemäß d), ii) zugeordneten Permutationen. Am Induktionsanfang bei  $n=p$  haben wir nach (4.5) und (4.6)

$$e_p = (0, p) = \bar{e}_p. \quad (4.13)$$

Für die  $\varphi(p)$ -te euklidische Koordinate von  $w$  folgt aus (4.9) und (4.10)

$$\frac{1}{2} u_p = \frac{1}{2} \bar{u}_p + \dots,$$

d.h.

$$u_p \geq \bar{u}_p;$$

die Berechnung der  $\bar{\varphi}(p)$ -ten Koordinate von  $w$  liefert die umgekehrte Ungleichung. Daraus folgt (4.11) für  $n=p$ ; wegen (4.13) ergibt das den Induktionsanfang. Seien nun die Behauptungen (4.11) und (4.12) bis zu einem  $n$  ( $n-1 \in [p-1]$ ) bewiesen. Dann folgt aus (4.10)

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i u_p(e_i) = w(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{u}_i u_p(\bar{e}_i) \quad (4.14)$$

( $w(n) \in \mathbf{R}^{p+1}$  ist durch (4.14) definiert). Ist nun

$$e_{n-1} = \bar{e}_{n-1},$$

so erhalten wir wie oben aus der Berechnung der  $\varphi(n-1)$ -Koordinate von  $w(n)$

$$u_{n-1} \geq \bar{u}_{n-1}$$

und analog die umgekehrte Ungleichung, d.h. (4.11). Ist dagegen

$$e_{n-1} \neq \bar{e}_{n-1}.$$

mit

$$e_{n-1} = (a, b), \quad \bar{e}_{n-1} = (\bar{a}, \bar{b}),$$

so ist wegen (4.6)

$$a \neq \bar{a}, \quad b \neq \bar{b}.$$

Ohne wesentliche Einschränkung können wir

$$\varphi(n-1) = a$$

annehmen; wir haben dann zwei Fälle zu unterscheiden: Ist  $\bar{\varphi}^{-1}(a) > n-1$ , so ergibt die Berechnung der  $a$ -ten Koordinate von  $w(n)$  nach (4.14)

$$\frac{1}{2} u_{n-1} = 0,$$

ist  $\bar{\varphi}^{-1}(a) < n-1$ , so schließt man mit Hilfe von (4.2) und (4.6) auf

$$b > \bar{b}$$

und damit wegen (4.2) auf

$$\bar{\varphi}^{-1}(b) > n-1,$$

dann berechnen wir aber für die  $b$ -te Koordinate von  $w(n)$  aus (4.14)

$$\cdots + \frac{1}{2} u_{n-1} = 0.$$

Wir haben also in jedem Fall

$$u_{n-1} = 0,$$

und analog ergibt sich

$$\bar{u}_{n-1} = 0.$$

Damit sind (4.11) und (4.12) gezeigt; daraus folgt aber unmittelbar die Injektivität von  $u_p$ .

ii) Zum Beweis der Surjektivität von  $u_p$  sei

$$w = (w_0, \dots, w_p) \in \Delta_p$$

gegeben. Wir setzen

$$v_n = \begin{cases} \sum_{i=0}^n w_i & \text{für } 0 \leq n \leq p-1 \\ \sum_{i=2p-n}^p w_i & \text{für } p \leq n \leq 2p-1 \end{cases}$$

und wählen eine Permutation  $\Phi$  von  $[2p-1]$ , so daß

$$v_{\Phi(0)} \leq v_{\Phi(1)} \leq \cdots \leq v_{\Phi(2p-1)} \quad (4.15)$$

ist und die Abbildungen  $[p-1] \rightarrow [2p-1]$ , die beschrieben sind durch

$$i \mapsto \Phi(i) \quad \text{bzw.} \quad \Phi(p+i) \quad \text{für alle } i \in [p-1]$$

monoton sind. Dann haben wir

$$v_{\Phi(j)} + v_{\Phi(2p-1-j)} = 1 \quad \text{für alle } j \in [2p-1]. \quad (4.16)$$

Wir definieren nun eine Abbildung  $\varphi: [p] \rightarrow [p]$  durch

$$\varphi(j) = \begin{cases} \Phi(p-j) & \text{falls } \Phi(p-j) \leq p-1 \\ 2p - \Phi(p-j) & \text{falls } \Phi(p-j) \geq p. \end{cases}$$

Durch Induktion ergibt sich, daß für dieses  $\varphi$  die Formeln (4.8) gelten.

(Dabei wird benutzt: Sind  $k, l \in [p]$  mit

$$\Phi(p-k) \leq p-1 \quad \text{und} \quad \Phi(p-l) \geq p,$$

so ist

$$\Phi(p-k) < 2p - \Phi(p-l).)$$

Das bedeutet, daß  $\varphi$  eine Permutation von  $[p]$  ist, und zwar eine, zu der es ein geordnetes  $p$ -Simplex

$$m = (e_0, \dots, e_p)$$

aus  $\mathfrak{D}_p$  mit (4.7) gibt. Außerdem erhalten wir wegen (4.15) und (4.16) durch die Festsetzung

$$u_j = \begin{cases} v_{\Phi(p)} - v_{\Phi(p-1)} & \text{für } j=0 \\ 2(v_{\Phi(p-j)} - v_{\Phi(p-j-1)}) & \text{für } 0 < j < p \\ 2v_{\Phi(0)} & \text{für } j=p \end{cases}$$

einen Punkt

$$u = (u_0, \dots, u_p) \in A_p,$$

so daß

$$w = u_p \left( \sum_{i=0}^p u_i e_i \right)$$

ist.

### 1.5. Beispiel III: Gerüsterhaltende Unterteilung

a) Sei  $r \in \mathbb{N}$ . Wir werden einen Standard-Unterteilungsfunktor  $U_r$  definieren, so daß  $U_r[p]$  und  $\Delta[p]$  für alle  $p \in [r]$  semisimplizial isomorph sind. Das hat für die von  $U_r$  induzierte Unterteilung einer semisimplizialen Menge  $X$  (s. 2.2) zur Folge, daß das  $p$ -Gerüst  $X^p$  von  $X$  und seine Unterteilung  $U_r(X^p)$  semisimplizial isomorph sind (für alle  $p \in [r]$ ).

Aus unserer Konstruktion wird sich dabei

$$\Delta' = U_0$$

(bis auf natürliche Äquivalenz) ergeben.

b) Wir werden  $U_r[p]$  als semisimpliziale Quotientenmenge von  $\Delta'[p]$  definieren. Dazu brauchen wir zunächst eine Äquivalenzrelation.

**Definition.** Zwei  $n$ -Simplizes

$$\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n) \quad \text{und} \quad v = (v_0, \dots, v_n)$$

aus  $\Delta'[p]$  sind  $r$ -äquivalent, wenn für alle  $i \in [n]$  gilt

$$\dim \mu_i \leq r \Rightarrow \dim v_i \leq r, \quad \mu_i(\dim \mu_i) = v_i(\dim v_i)$$

$$\dim \mu_i > r \Rightarrow \mu_i = v_i.$$

$r$ -Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen die von  $\mu \in (\Delta'[p])_n$  repräsentierte  $r$ -Äquivalenzklasse in  $(\Delta'[p])_n$  mit  $[\mu]$ . Die  $r$ -Äquivalenz ist außerdem mit den Operatoren in  $\Delta'[p]$  und den semisimplizialen Abbildungen  $\Delta'\gamma$  (s. 1.3 b)) verträglich. Deshalb ist folgende Beschreibung des Funktors  $U_r$  möglich:

$n$ -Simplizes von  $U_r[p]$  sind die  $r$ -Äquivalenzklassen in  $(\Delta'[p])_n$ . Ist  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$ , so ist

$$[\mu] \alpha = [\mu \alpha]$$

für alle  $\mu \in (\Delta'[p])_n$ .

Ist  $\gamma: [p] \rightarrow [q]$  aus  $\underline{A}$ , so ist die semisimpliziale Abbildung

$$U_r \gamma: U_r[p] \rightarrow U_r[q]$$

gegeben durch

$$U_r \gamma [\mu] = [\Delta' \gamma \mu]$$

für alle  $\mu \in \Delta'[p]$ .

c) Auch  $U_r[p]$  läßt sich aus einem geordneten simplizialen Komplex  $\mathfrak{U}_{r,p}$  ableiten (für alle  $r, p \in \mathbb{N}$ ): Als Eckenmenge von  $\mathfrak{U}_{r,p}$  nehmen wir die Menge

$$\mathfrak{E}_{r,p} = (U_r[p])_0.$$

Eine Teilordnung in  $\mathfrak{E}_{r,p}$  erhalten wir durch die Festsetzung

$$[\mu] \leq [\nu] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Es gibt } \mu_0, \nu_0 \in (\Delta[p])^+ \text{ mit} \\ (\mu_0) \in [\mu], (\nu_0) \in [\nu], \text{Bild } \mu_0 \subset \text{Bild } \nu_0. \end{cases}$$

Die abstrakten Simplizes von  $\mathfrak{U}_{r,p}$  sind dann wieder die vollständig geordneten Teilmengen von  $\mathfrak{E}_{r,p}$ .

d) Die benötigten Homöomorphismen  $u_{r,p}: |U_r[p]| \rightarrow \Delta_p$  beschreiben wir wieder unter Verwendung der simplizialen Komplexe  $\mathfrak{U}_{r,p}$ :

Wir definieren  $u_{r,p}$  auf den Ecken  $e$  von  $\mathfrak{U}_{r,p}$  durch

$$u_{r,p}(e) = \begin{cases} |(\mu_0 \varepsilon_{\dim \mu_0})| & \text{für } e = [(\mu_0)], \quad \dim \mu_0 \leq r \\ |(\mu_0)| & \dim \mu_0 \geq r \end{cases}$$

und im Inneren der Simplizes von  $\mathfrak{U}_{r,p}$  durch lineare Fortsetzung; unter  $|(\mu_0 \varepsilon_{\dim \mu_0})|$  bzw.  $|(\mu_0)|$  verstehen wir dabei die entsprechenden Nullzellen von  $|\Delta'[p]| = \Delta_p$  (vgl. 1.3 c)). Diese Definition ist offensichtlich unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten  $\mu_0$  für  $e$  und liefert einen Homöomorphismus; auch Bedingung b) aus 1.1 rechnet man sofort nach.

e) Für diese Arbeit liegt die Bedeutung der Funktoren  $U_r$  in einer pathologischen Eigenschaft, die  $\Delta'$  und  $\Delta^\vee$  nicht haben:

*Sowohl für  $U = \Delta'$  als auch für  $U = \Delta^\vee$  (und natürlich auch für  $U = \Delta$ ) gilt: Ist  $\mu$  ein inneres Simplex von  $U[p]$  und  $\gamma: [p] \rightarrow [q]$  eine surjektive monotone Abbildung, so ist  $U \gamma \mu$  ein inneres Simplex von  $U[q]$ .*

Daß das für  $U_r$  nicht gilt, kann man sich schon im Fall  $r=1, p=2, q=1$  und  $\gamma = \sigma_e$  ( $e=0, 1$ ) klar machen. Die Zellerlegung von  $\Delta_2$ , aufgefaßt als geometrische Realisierung von  $U_1[2]$  veranschaulicht Fig. 4.

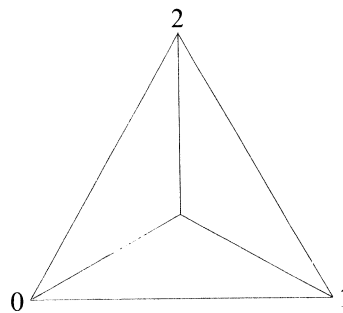


Fig. 4

Die innere Nullzelle muß bei  $|U\sigma_e|$  in eine Nullzelle von  $|U_1[1]|=\Delta_1$  übergehen;  $U_1[1]=\Delta[1]$  hat aber keine inneren 0-Simplizes, also hat  $|U_1[1]|$  auch keine innere Nullzelle!

## § 2. Unterteilung semisimplizialer Mengen

### 2.0. Vorbemerkung

Ein Standard-Unterteilungsfunktor  $U$  und eine semisimpliziale Menge  $X$  seien fest gegeben.

### 2.1. Äquivalenzklassen von $U$ -Paaren

Wir bilden die Menge

$$\mathfrak{U}X = \{(x, \mu) / x \in X, \mu \in U[\dim x]\},$$

die Elemente von  $\mathfrak{U}X$  nennen wir „ $U$ -Paare“.

**Definition.** Das  $U$ -Paar  $(x, \mu)$  ist dem  $U$ -Paar  $(y, \nu)$  *ähnlich*, wenn es ein  $\gamma: [\dim x] \rightarrow [\dim y]$  mit

$$\begin{aligned} \text{und} \quad & x = y \gamma \\ & \nu = U \gamma \mu \end{aligned}$$

gibt.

Wir betrachten die von der Ähnlichkeit erzeugte Äquivalenzrelation in  $\mathfrak{U}X$ . Mit  $[x, \mu]$  bezeichnen wir dabei die von dem Paar  $(x, \mu)$  repräsentierte Äquivalenzklasse in  $\mathfrak{U}X$  (bezüglich dieser Äquivalenzrelation).

In jeder Äquivalenzklasse gibt es ein ausgezeichnetes  $U$ -Paar. Dazu geben wir zunächst die

**Definition.** Ein  $U$ -Paar  $(x, \mu)$  ist *regulär*, wenn  $x$  nicht entartet und  $\mu$  inneres Simplex von  $U[\dim x]$  ist.

Dann haben wir den

**Satz.** Jede Äquivalenzklasse in  $\mathfrak{U}X$  enthält genau ein reguläres  $U$ -Paar.

*Beweis.* a) Existenz: Sei  $(y_0, \nu_0)$  ein beliebiges  $U$ -Paar.

Wir definieren eine Folge

$$\eta = ((y_i, \nu_i) / i \in \mathbb{N})$$

von  $U$ -Paaren durch die Festsetzung

$$(y_{i+1}, \nu_{i+1}) = \begin{cases} (y_i \nu_{i\#}, \nu_{i+}) & \text{falls } i \text{ gerade} \\ (y_i^+, U y_i^\circ \nu_i) & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Offensichtlich gilt  $(y_i, \nu_i) \in [y_0, \nu_0]$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

Die Folge  $\eta$  wird genau dann von einer Stelle  $j$  ab konstant, wenn  $(y_j, \nu_j)$  regulär ist. Also enthält die Menge

$$\{(y_i, \nu_i) / i \in \mathbb{N}\}$$

höchstens ein reguläres U-Paar. Außerdem folgt aber aus (1.1)

$$\dim y_i \geq \dim y_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbf{N},$$

also muß die Folge  $\eta$  von einer Stelle  $j$  an konstant sein. Das beweist die Existenz eines regulären U-Paares in der (beliebigen) Klasse  $[y_0, v_0]$ .

b) Eindeutigkeit: Sei  $(z_0, \lambda_0)$  ein beliebiges U-Paar und  $(y_0, v_0)$  ähnlich  $(z_0, \lambda_0)$ , d. h.

$$y_0 = z_0 \gamma_0, \quad \lambda_0 = U \gamma_0 v_0 \quad (1.2)$$

für ein  $\gamma_0: [\dim y_0] \rightarrow [\dim z_0]$ . Die Folge

$$\eta = ((y_i, v_i)/i \in \mathbf{N})$$

sei wie in a), die Folge

$$\zeta = ((z_i, \lambda_i)/i \in \mathbf{N})$$

analog definiert.

Es ist nun zu zeigen, daß diese Folgen das gleiche reguläre U-Paar enthalten (jede von ihnen enthält, wie wir bereits unter a) festgestellt haben, genau ein reguläres U-Paar). Dazu können wir ohne wesentliche Einschränkung annehmen, daß  $v_0$  ein inneres Simplex von  $U[\dim y_0]$  ist. Dann haben wir nach (1.1)

$$y_1 = y_0, \quad v_1 = v_0$$

und nach (1.2)

$$y_1 = z_0 \gamma_0, \quad \lambda_0 = U \gamma_0 v_1. \quad (1.3)$$

Nun sei eine Folge  $(\gamma_i/i \in \mathbf{N})$  von Operatoren gegeben, so daß die Gleichungen

$$y_{i+1} = z_i \gamma_i, \quad \lambda_i = U \gamma_i v_{i+1} \quad \text{für gerades } i \quad (1.4)$$

$$z_i = y_{i+1} \gamma_i, \quad v_{i+1} = U \gamma_i \lambda_i \quad \text{für ungerades } i$$

erfüllt sind.

(Eine solche Folge kann man sich induktiv konstruieren: Den Anfang liefert (1.3); hat man die  $\gamma_i$  bis zu einem geraden  $j$ , so macht man den Ansatz

$$\gamma_{j+1} = (z_j \gamma_j^+)^{\circ} (U \gamma_j^{\circ} v_{j+1})_{\ast}$$

und beweist mit Hilfe von (1.1), § 1 Formel (2.12) und

$$(z_j \gamma_j^+)^+ = (z_j \gamma_j)^+$$

die Gleichung

$$z_{j+1} = y_{j+2} \gamma_{j+1},$$

mit Hilfe von (1.1), § 1 Formel (2.13) und

$$(z_j \gamma_j^+)^{\circ} \gamma_j^{\circ} = (z_j \gamma_j)^{\circ}$$

ergibt sich auch

$$v_{j+2} = U \gamma_{j+1} \lambda_{j+1}.$$

Kennt man die  $\gamma_i$  bis zu einem ungeraden  $j$ , so liefert der Ansatz

$$\gamma_{j+1} = (y_{j+1} \gamma_j^+)^{\circ} (U \gamma_j^{\circ} \lambda_j)_{\ast}$$

das Gewünschte.)

Jetzt wählen wir einen geraden Index  $j$ , so daß  $(y_j, v_j)$  ein reguläres U-Paar ist. Es genügt zu zeigen:

$$(y_j, v_j) = (z_{j+1}, \lambda_{j+1}). \quad (1.5)$$

Zunächst stellen wir mit Hilfe von a) fest:

$$v_j = v_{j+1} = v_{j+2} = \dots. \quad (1.6)$$

Unter Berücksichtigung von (1.1) und (1.4) können wir dann berechnen

$$\begin{aligned} \lambda_j &= U \gamma_j v_{j+1} = U \gamma_j v_{j+2} \\ &= U (\gamma_j \gamma_{j+1}) \lambda_{j+1} = U (\gamma_j \gamma_{j+1}) \lambda_{j+}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

§ 1, Formel (2.12) ergibt damit

$$\lambda_{j\infty} = (\gamma_j \gamma_{j+1})^+ \dots;$$

daraus folgt insbesondere

$$\dim \lambda_{j\infty} \leq \dim (\gamma_j \gamma_{j+1})^+.$$

Andererseits haben wir mit Hilfe von (1.7)

$$\dim (\gamma_j \gamma_{j+1})^+ \leq \dim (\gamma_j \gamma_{j+1}) = \dim \lambda_{j\infty}.$$

Zusammen ergibt das

$$\dim (\gamma_j \gamma_{j+1})^+ = \dim (\gamma_j \gamma_{j+1}),$$

also

$$(\gamma_j \gamma_{j+1})^+ = \gamma_j \gamma_{j+1}. \quad (1.8)$$

Nach (1.4) haben wir

$$v_{j+2} = U \gamma_{j+1} \lambda_{j+1}.$$

Hier ist  $\gamma_{j+1}$  injektiv (nach (1.8)),  $\lambda_{j+1}$  ist inneres Simplex (nach (1.1)) und ebenso  $v_{j+2}$  (auf Grund der Wahl von  $j$  und wegen (1.6)). Aus der Eindeutigkeitsaussage in 1.2 Lemma 4 (und (1.6)) folgt also

$$v_j = v_{j+2} = \lambda_{j+1}$$

und

$$\gamma_{j+1} = \text{id} [\dim \gamma_{j+1}].$$

Aus (1.4) ergibt sich nun noch

$$z_{j+1} = y_{j+2} \gamma_{j+1} = y_{j+2} = y_j$$

(die Folge  $\eta$  ist mindestens ab  $j$  konstant!).

Damit ist aber (1.5) bewiesen.

**Zusatz.** Sei  $(x, \mu)$  regulär und  $(y, v) \in [x, \mu]$ . Ist  $v$  entartet, so ist es auch  $\mu$ .

## 2.2. Definition

Die (von  $U$  induzierte) Unterteilung von  $X$  ist die semisimpliziale Menge  $U X$ , die gegeben ist durch:

$$(U X)_n = \{[x, \mu] / (x, \mu) \in \mathfrak{U} X, \dim \mu = n\}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und

$$[x, \mu] \alpha = [x, \mu \alpha]$$

für alle  $[x, \mu] \in (U X)_n$  und alle  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{\Delta}$ .

Ist  $Y$  eine weitere semisimpliziale Menge und  $f: X \rightarrow Y$  eine semisimpliziale Abbildung, so ist die Unterteilung von  $f$  die semisimpliziale Abbildung  $U f: U X \rightarrow U Y$ , die gegeben ist durch

$$U f[x, \mu] = [f x, \mu] \quad \text{für alle } [x, \mu] \in U X.$$

*Bemerkungen.* Die „(von  $U$  induzierte) Unterteilung“ ist ein Funktor  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , der i. a. ebenfalls durch den Buchstaben „ $U$ “ bezeichnet werden soll; nur wo es auf die Unterscheidung von dem „erzeugenden“ Standard-Unterteilungsfunktor ankommt, werden wir die Unterteilung mit „ $U_{\mathcal{S}}$ “ bezeichnen.  $U_{\mathcal{S}}$  ist durch  $U$  eindeutig bestimmt (bis auf natürliche Äquivalenz), wenn man noch Verträglichkeit mit direkten Limites verlangt (s. Gabriel-Zisman [6] Kap. II 1.4).

Für alle  $p \in \mathbb{N}$  sind  $U[p]$  und  $U\Delta[p]$  in natürlicher Weise semisimplizial isomorph (der Isomorphismus wird durch die Abbildung

$$\mu \mapsto [\text{id}[p], \mu] \quad \text{für alle } \mu \in U[p]$$

beschrieben), also läßt sich die Unterteilung als „Fortsetzung“ oder „Vervollständigung“ des erzeugenden Standard-Unterteilungsfunktors auffassen.

*Abkürzung.* Da  $|U[0]| = \Delta_0$ , also einpunktig ist, sind  $U[0]$  und  $\Delta[0]$  in eindeutiger Weise semisimplizial isomorph. Zur Abkürzung identifizieren wir  $U[0]$  und  $\Delta[0]$  im folgenden.

## 2.3. Geometrische Realisierung der Unterteilung

**Satz 1.** Die geometrische Realisierung  $|U X|$  von  $U X$  ist in natürlicher Weise homöomorph zu dem Quotientenraum  $Q X$  von  $\mathfrak{F} X$  nach der Identifizierung

$$(x \alpha, v) \sim (x, |U \alpha| v)$$

für alle  $x \in X_n$ ,  $v \in \Delta_m$  und  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{\Delta}$  (vgl. 0.3).

Wir führen hierzu die folgenden Bezeichnungen ein: Ist  $x \in X_n$  und  $u \in \Delta_n$ , so ist  $\langle x, u \rangle$  der von  $(x, u)$  repräsentierte Punkt von  $Q X$ ; außerdem setzen wir

$$\langle x \rangle = \{\langle x, u \rangle / u \in \Delta_n\}$$

für alle  $x \in X_n$ .



*Beweis.* Die Zuordnung

$$|[x, \mu], u| \mapsto \langle x, |\mu, u| \rangle \quad (3.1)$$

ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten und liefert damit eine stetige Abbildung

$$h: |UX| \rightarrow QX.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv und ein Homöomorphismus. Auch die Natürlichkeit ist klar.

**Satz 2.** *Jeder Punkt von  $QX$  ( $QX$  wie in Satz 1 definiert) kann eindeutig durch ein Paar  $(x, u)$  repräsentiert werden, wobei  $x \in X$  nicht entartet und  $u$  ein innerer Punkt von  $\Delta_{\dim x}$  ist.*

*Beweis.* Sei  $x \in QX$ .  $h^{-1}x$  kann eindeutig in der Form  $[x, \mu], u|$  repräsentiert werden, wobei  $(x, \mu)$  ein reguläres  $U$ -Paar,  $\mu \in U[\dim x]$  nicht entartet und  $u$  ein innerer Punkt von  $\Delta_{\dim \mu}$  ist; das folgt aus dem Satz in 2.1 und Lemma 3 in Milnor [13] §1. Aus Lemma 3 in 1.2 folgt, daß  $|\mu, u|$  ein innerer Punkt von  $\Delta_{\dim x}$  ist. Nach (3.1) ist

$$x = \langle x, |\mu, u| \rangle,$$

also ist  $(x, |\mu, u|)$  ein Paar der gewünschten Form, das offensichtlich eindeutig bestimmt ist (s. Lemma 3 in 1.2).

**Folgerung 1.**  $(\langle x \rangle / x \in X^+)$  ist eine Zellenzerlegung von  $QX$ , so daß  $QX$  sich als CW-Komplex auffassen läßt.

Wir haben also verschiedene CW-Komplexe  $|UX|$  und  $QX$ , deren unterliegende topologische Räume homöomorph sind. Vermöge des durch (3.1) beschriebenen Homöomorphismus identifizieren wir diese topologischen Räume, behalten jedoch auch im folgenden die unterschiedlichen Bezeichnungen  $QX$  und  $|UX|$  bei, um anzudeuten, welche Zellenzerlegung wir jeweils betrachten.

**Folgerung 2.**  $Q(X^p)$  und  $(QX)^p$  sind in natürlicher Weise homöomorph. (Dabei bezeichnet  $X^p$  wie üblich das  $p$ -Gerüst von  $X$ , also eine semisimpliziale Menge, und  $(QX)^p$  das  $p$ -(Zellen-)Gerüst des CW-Komplexes  $QX$ .)

#### 2.4. Vergleich mit der Unterteilung von CW-Komplexen

Whitehead definiert in [17] §9, was unter der Unterteilung eines CW-Komplexes verstanden werden soll.

Der CW-Komplex  $K'$  ist eine Unterteilung des CW-Komplexes  $K$ , wenn

- a) die unterliegenden topologischen Räume übereinstimmen und
- b) jede (offene) Zelle von  $K'$  in einer (offenen) Zelle von  $K$  enthalten ist.

In diesem Sinne ist  $|U[p]|$  eine Unterteilung von  $|\Delta[p]|$  (für jedes  $p \in \mathbb{N}$ ) und außerdem nach 2.3  $|UX|$  eine Unterteilung von  $QX$ .

Nun erhebt sich die Frage, ob  $|UX|$  auch als (CW-) Unterteilung von  $|X|$  verstanden werden kann. Wir können dieses Problem nicht allgemein lösen. Man würde dazu einen zellularen Homöomorphismus

$$H: QX \rightarrow |X|$$

benötigen. In vielen Fällen gibt es sicher keinen natürlichen Homöomorphismus zwischen diesen Räumen, z. B. bei der Normalunterteilung (eine spezielle Untersuchung der Normalunterteilung enthält [5]).

Wir werden im folgenden jedoch eine Reihe von Bedingungen angeben, unter denen ein solcher Homöomorphismus existiert, das Hauptergebnis in dieser Richtung enthält § 7 im Teil II ([4]).

Hier bringen wir zunächst vier einfache Sätze:

**Satz 1.** *Gilt in Verschärfung von Formel (1.1) aus § 1*

$$|U\gamma| = |\Delta\gamma| \quad \text{für alle } \gamma \in \underline{\Delta},$$

*so sind  $QX$  und  $|X|$  in natürlicher Weise zellular homöomorph.*

*Beweis.* Unter dieser Voraussetzung ist die Zuordnung

$$\langle x, u \rangle \mapsto |x, u| \quad (4.1)$$

für alle  $x \in X$  und  $u \in \Delta_{\dim x}$  unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten und liefert damit den gewünschten Homöomorphismus.

Dieser Satz läßt sich also auf die in 1.4 beschriebene natürliche Unterteilung anwenden.

Für alle  $\alpha^n$  ist das Ziel von  $|\Delta\alpha^n|$  bzw.  $|U\alpha^n|$  der einpunktige Raum  $\Delta_0$ , d. h. für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$|U\alpha^n| = |\Delta\alpha^n|.$$

Das führt uns auf

**Satz 2.**  *$QX$  und  $|X|$  sind zellular homöomorph, wenn für jedes  $x \in X_n^+$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gilt: Für injektives  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  ist  $x\alpha$  entweder nicht entartet oder gleich  $y\alpha^m$ , wobei  $y$  ein geeignetes 0-Simplex von  $X$  bedeutet. Der Homöomorphismus kann durch eine Zuordnung der Form (4.1) beschrieben werden.*

*Beweis.*  $QX$  und  $|X|$  entstehen unter den angegebenen Voraussetzungen aus  $\mathfrak{F}^+ X$  durch die Identifizierungen

$$(x\alpha, v) \sim_{(x, |\Delta\alpha|v)} \quad \text{bzw.} \quad (x\alpha, v) \sim_{(x, |U\alpha|v)}$$

falls  $x \in X_n^+$ ,  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{\Delta}$  und injektiv,  $x\alpha$  nicht entartet und  $v \in \Delta_m$  und durch die Identifizierungen

$$(y, (1)) \sim_{(x, |\Delta\alpha|v)} \quad \text{bzw.} \quad (y, (1)) \sim_{(x, |U\alpha|v)}$$

falls  $x \in X_n^+$ ,  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{\Delta}$  und injektiv,  $x\alpha = y\alpha^m$  und  $v \in \Delta_m$ .

Für 2-dimensionale semisimpliziale Mengen ist dieser Homöomorphismus sogar natürlich:

**Satz 3.**  $(QX)^2 = Q(X^2)$  und  $|X^2| = |X|^2$  sind in natürlicher Weise homöomorph.

Der Beweis ist trivial.

Eine allgemeinere Aussage macht der

**Satz 4.** Es gibt jedenfalls dann einen zellularen Homöomorphismus  $h: QX \rightarrow |X|$ , wenn es eine Familie  $(h_x/x \in X)$  von stetigen Abbildungen  $h_x: \Delta_{\dim x} \rightarrow \Delta_{\dim x}$  gibt, so daß gilt:

i) Ist  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{\Delta}$ , so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta_m & \xrightarrow{h_{x \cdot \alpha}} & \Delta_m \\ |U \alpha| \downarrow & & \downarrow |\Delta \alpha| \\ \Delta_n & \xrightarrow{h_x} & \Delta_n \end{array}$$

für alle  $x \in X_n$  kommutativ.

ii) Ist  $x \in X^+$ , so induziert  $h_x$  einen Homöomorphismus des Inneren von  $\Delta_n$  auf sich.

Der Beweis ist wieder trivial.

## 2.5. Verhalten von Fundamentalgruppe und universeller Überlagerung bei Unterteilung

Im folgenden sei  $X$  zusammenhängend.

**Satz 1.** Die Fundamentalgruppen von  $X$  und  $UX$  sind in natürlicher Weise isomorph.

*Beweis.* Die Fundamentalgruppe einer semisimplizialen Menge ist in natürlicher Weise isomorph zur Fundamentalgruppe ihrer geometrischen Realisierung. Die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes hängt aber nur von seinem 2-Gerüst bezüglich einer beliebigen (CW-) Zellenzerlegung ab. Deshalb liefert Satz 3 aus 2.4 die Behauptung.

**Satz 2.** Ist  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung von  $X$ , so ist  $Up: U\tilde{X} \rightarrow UX$  eine universelle Überlagerung von  $UX$ .

*Beweis.* Nach Satz 1 ist  $U\tilde{X}$  einfach zusammenhängend. Also genügt es nach Lamotke [12], III 3 zu beweisen, daß  $Up$  die Überlagerungsbedingung erfüllt.

Dazu sei  $x \in UX$ ,  $\tilde{x} \in (U\tilde{X})_0$  und

$$Up \tilde{x} = x \varepsilon_k \quad \text{für ein } k \in [\dim x]. \quad (5.1)$$

Es ist zu zeigen, daß genau ein  $\tilde{x} \in U\tilde{X}$  die Gleichungen

$$Up \tilde{x} = x, \quad \tilde{x} \varepsilon_k = \tilde{x} \quad (5.2)$$

simultan erfüllt. Dabei seien  $(x, \mu)$  und  $(\tilde{x}, \lambda)$  die regulären U-Paare in  $x$  bzw.  $\tilde{x}$ .

a) Existenz von  $\tilde{x}$ : Wir wählen ein  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  mit

$$p \tilde{x} = x;$$

dann ist  $(\tilde{x}, \mu)$  das reguläre U-Paar in  $[\tilde{x}, \mu]$ . Ist  $(\tilde{y}, v)$  das reguläre U-Paar in  $[\tilde{x}, \mu] \varepsilon_k$ , so folgt unter Verwendung von (5.1)

$$[p \tilde{y}, v] = U p [\tilde{y}, v] = U p [\tilde{x}, \mu] \varepsilon_k = [p \tilde{x}, \mu] \varepsilon_k = [x, \mu] \varepsilon_k = U p [\tilde{z}, \lambda] = [p \tilde{z}, \lambda].$$

Da  $(p \tilde{y}, v)$  und  $(p \tilde{z}, \lambda)$  reguläre U-Paare sind, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage des Satzes in 2.1

$$p \tilde{y} = p \tilde{z}, \quad v = \lambda.$$

Nach Lamotke [12] III 4 gibt es nun eine Deckbewegung  $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit

$$f \tilde{y} = \tilde{z}$$

und wir können berechnen:

$$U p [f \tilde{x}, \mu] = [p f \tilde{x}, \mu] = [p \tilde{x}, \mu] = [x, \mu],$$

sowie

$$[f \tilde{x}, \mu] \varepsilon_k = U f [\tilde{x}, \mu] \varepsilon_k = U f [\tilde{y}, v] = [f \tilde{y}, v] = [\tilde{z}, \lambda],$$

d.h.

$$\tilde{x} = [f \tilde{x}, \mu]$$

befriedigt die Gln. (5.2).

b) Eindeutigkeit: Sei  $\bar{x} \in (U \tilde{X})$  ein weiteres Simplex, das die Gln. (5.2) erfüllt und  $(\bar{x}, \bar{\mu})$  das reguläre U-Paar in  $\bar{x}$ .

Da

$$U p [\bar{x}, \bar{\mu}] = [p \bar{x}, \bar{\mu}]$$

gilt, haben wir

$$p \bar{x} = x$$

und

$$\bar{\mu} = \mu.$$

Andererseits gilt aber auch

$$p f \tilde{x} = p \tilde{x} = x;$$

also gibt es eine Deckbewegung  $g: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit

$$g \bar{x} = f \tilde{x}.$$

Damit berechnen wir:

$$[g \tilde{z}, \lambda] = U g [\tilde{z}, \lambda] = U g [\bar{x}, \bar{\mu}] \varepsilon_k = [g \bar{x}, \bar{\mu}] \varepsilon_k = [f \tilde{x}, \mu] \varepsilon_k = [\tilde{z}, \lambda],$$

woraus

$$g \tilde{z} = \tilde{z}$$

folgt, d.h.

$$g = \text{id } \tilde{X},$$

und wir haben auch

$$\bar{x} = g \bar{x} = f \tilde{x},$$

d.h.

$$\bar{x} = [f \tilde{x}, \mu].$$

### 2.6. Homologie der Unterteilung

Für jedes  $x \in X^+$  läßt sich  $|c_x|$ , die geometrische Realisierung der charakteristischen Abbildung für  $x$ , als Erzeugendes des Komplexes  $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_n, d)$  der Zellenketten von  $|X|$  und  $|U c_x|$  als Erzeugendes des Komplexes  $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}_n, d)$  der Zellenketten von  $QX$  auffassen. Mit Hilfe der Beschreibung des Komplexes der Zellenketten von Schubert in [15] IV 3.4 findet man nun: Der Randoperator in  $\mathfrak{X}$  ist gegeben durch

$$|c_x| \mapsto \sum_i (-1)^i |c_x| \circ |\Delta \delta_i| = \sum_i (-1)^i |c_{x\delta_i}|,$$

wobei über diejenigen  $i$  zu summieren ist, für die  $x\delta_i$  nicht entartet ist. Entsprechend ist der Randoperator in  $\mathfrak{Q}$  gegeben durch

$$|U c_x| \mapsto \sum_i (-1)^i |U c_x| |\Delta \delta_i| = \sum_i (-1)^i |U c_{x\delta_i}|,$$

wobei wieder über diejenigen  $i$  zu summieren ist, für die  $x\delta_i$  nicht entartet ist.

Damit induziert die Zuordnung

$$|c_x| \mapsto |U c_x| \quad (6.1)$$

einen natürlichen Isomorphismus  $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{Q}$  (Isomorphismus von Kettenkomplexen!). Daraus folgt, daß die Homologiegruppen von  $|X|$  und  $|UX|$  in natürlicher Weise isomorph sind, wobei der Isomorphismus durch (6.1) induziert wird. Aus Lamotke [12] V 8 ergibt sich nun der

**Satz.** Die Homologiegruppen von  $X$  und  $UX$  sind in natürlicher Weise isomorph.

### 2.7. Erhaltung von schwachen Homotopieäquivalenzen

Sei  $X$  zusammenhängend und  $Y$  eine weitere semisimpliziale Menge.

**Definition.** Eine semisimpliziale Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist eine *schwache Homotopieäquivalenz*, wenn  $f$  einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen und die universelle Überlagerung  $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  Isomorphismen aller Homologiegruppen induziert.

Diese Definition wird dadurch gerechtfertigt, daß aus einem berühmten Satz von Whitehead ([17] §1 Theorem 3) folgt:

*$f: X \rightarrow Y$  ist genau dann eine schwache Homotopieäquivalenz, wenn  $|f|: |X| \rightarrow |Y|$  eine Homotopieäquivalenz ist.*

Der Funktor  $U: \underline{\mathcal{S}} \rightarrow \underline{\mathcal{S}}$  erhält schwache Homotopieäquivalenzen; genauer:

**Satz.**  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann eine schwache Homotopieäquivalenz, wenn  $Uf: UX \rightarrow UY$  eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

*Beweis.* 2.5 Satz 1, 2 und 2.6.

### § 3. Nicht entartete semisimpliziale Mengen

#### 3.1. Definition

**Definition.** Eine semisimpliziale Menge  $X$  ist *nicht entartet*, wenn  $x\alpha$  nicht entartet ist für jedes  $x \in X_n^+$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und jedes injektive  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$ .

Sind  $X$  und  $Y$  nicht entartete semisimpliziale Mengen, so ist die semisimpliziale Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  *nicht entartet*, wenn

$$f(X^+) \subset Y^+$$

ist.

Nicht entartete semisimpliziale Mengen und nicht entartete semisimpliziale Abbildungen bilden die Teilkategorie  $\underline{P}$  von  $\underline{S}$ .

#### 3.2. Seitenähnliche $\Delta$ -Paare

Sei  $X$  eine beliebige semisimpliziale Menge und  $\mathfrak{P}X$  die Menge der  $\Delta$ -Paare von  $X$  (s. 2.1;  $\Delta$  ist ein Standard-Unterteilungsfunktor!).

**Definition.** Das  $\Delta$ -Paar  $(x, \mu)$  ist dem  $\Delta$ -Paar  $(y, \nu)$  *seitenähnlich*, wenn es ein injektives  $\gamma: [\dim x] \rightarrow [\dim y]$  mit

$$x = y\gamma$$

und

$$\nu = \gamma\mu$$

gibt.

Wir betrachten jetzt die von der Seitenähnlichkeit erzeugte Äquivalenzrelation in  $\mathfrak{P}X$ . Mit  $\lfloor x, \mu \rfloor$  bezeichnen wir dabei die von dem  $\Delta$ -Paar  $(x, \mu)$  repräsentierte Äquivalenzklasse in  $\mathfrak{P}X$  (bezüglich dieser Äquivalenzrelation).

Analog zu dem Satz in 2.1 gilt das hier triviale

**Lemma.** Jede Äquivalenzklasse von seitenähnlichen  $\Delta$ -Paaren enthält genau ein  $\Delta$ -Paar  $(x, \mu)$ , derart daß  $\mu$  surjektiv ist.

#### 3.3. Der Funktor $P: \underline{S} \rightarrow \underline{P}$

Sei  $X$  eine beliebige semisimpliziale Menge. Die *semisimpliziale Menge*  $PX$  ist gegeben durch

$$(PX)_n = \{\lfloor x, \mu \rfloor \mid (x, \mu) \in \mathfrak{P}X, \dim \mu = n\}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\lfloor x, \mu \rfloor \alpha = \lfloor x, \mu \alpha \rfloor$$

für alle  $\lfloor x, \mu \rfloor \in (PX)_n$  und alle  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$ . Ist  $Y$  eine weitere semisimpliziale Menge und  $f: X \rightarrow Y$  eine semisimpliziale Abbildung, so ist die *nicht entartete semisimpliziale Abbildung*  $Pf: PX \rightarrow PY$  definiert durch

$$Pf \lfloor x, \mu \rfloor = \lfloor f x, \mu \rfloor \quad \text{für alle } \lfloor x, \mu \rfloor \in PX.$$

Für jede semisimpliziale Menge  $X$  definieren wir außerdem eine *semisimpliziale Abbildung*  $pX: PX \rightarrow X$  durch

$$pX \lfloor x, \mu \rfloor = x\mu \quad \text{für alle } \lfloor x, \mu \rfloor \in PX.$$

Die Zuordnungen  $X \mapsto PX$ ,  $f \mapsto Pf$  definieren einen Funktor  $P: \underline{S} \rightarrow \underline{P}$ . Bezeichnet  $E: \underline{P} \rightarrow \underline{S}$  die Einbettung und  $J: \underline{S} \rightarrow \underline{S}$  die Identität, so bildet die Familie

$$\mathcal{P} = (pX/X \in |\underline{S}|)$$

eine natürliche Transformation  $EP \rightarrow J$ .

*Bemerkung.* Die hier gebrauchte „Seitenähnlichkeit“ erzeugt eine schwächere Äquivalenzrelation als die in 2.1 definierte Ähnlichkeit. Die von  $\Delta$  induzierte Unterteilung einer semisimplizialen Menge  $X$  ist ja bis auf natürliche Isomorphie nichts anderes als die semisimpliziale Menge  $X$  selbst und wir erhalten sie aus  $PX$  durch die weitere „Identifizierung“  $pX$ .

### 3.4. Der Homotopietyp von $PX$

$X$  sei eine zusammenhängende semisimpliziale Menge.

**Lemma 1.**  $pX$  induziert einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen.

*Beweis.* Wir verwenden die von Lamotke in [12] III 2 angegebene Beschreibung der Fundamentalgruppe durch Erzeugende und Relationen.

Die Inklusion  $i: X \hookrightarrow PX$ , die durch

$$x \mapsto \lfloor x, \text{id}[\dim x] \rfloor \quad \text{für alle } x \in X$$

gegeben ist, ist zwar keine semisimpliziale Abbildung, aber immerhin mit den Seitenoperatoren verträglich. Außerdem ist

$$\text{Bild } i = (PX)^+. \quad (4.1)$$

Wir wählen nun einen (maximalen) Baum  $B$  in  $X$ . Mit Hilfe von  $i$  ordnen wir ihm einen Baum  $PB$  in  $PX$  zu, so daß ein nicht entartetes 1-Simplex  $x \in X$  genau dann in einem Streckenzug von  $B$  auftritt, wenn  $ix$  in einem Streckenzug von  $PB$  auftritt. Die Fundamentalgruppe  $\pi_1 X$  von  $X$  wird dann von den nicht entarteten 1-Simplizes aus  $X$ , die in keinem Streckenzug von  $B$  auftreten, erzeugt. Jedes nicht entartete 2-Simplex  $y \in X$  bestimmt die Relation

$$y\delta_2 \circ y\delta_0 = y\delta_1;$$

sollte hier ein  $y\delta_i$  entartet sein oder in einem Streckenzug von  $B$  auftreten, so ist es durch 1 zu ersetzen. Analog wird die Fundamentalgruppe  $\pi_1 PX$  von  $PX$  unter Verwendung von  $PB$  beschrieben.

Wir behaupten nun:  $i$  induziert einen Homomorphismus  $i_*: \pi_1 X \rightarrow \pi_1 PX$ . Dazu ist nur noch

$$ix = 1 \quad \text{für alle } x \in X_1 - X_1^+ \quad (4.2)$$

zu zeigen. Für solche  $x$  gilt aber

$$x\sigma_0\delta_i = x \quad \text{für alle } i \in [2];$$

also haben wir

$$ix \circ ix = ix\sigma_0\delta_2 \circ ix\sigma_0\delta_0 \stackrel{*}{=} ix\sigma_0\delta_1 = ix$$

( $i(x\sigma_0)$  ist nach (4.1) ein nicht entartetes 2-Simplex in  $PX$  und bestimmt deshalb die Relation \*). Daraus ergibt sich (4.2) unmittelbar.

$i_{\mathfrak{x}}$  ist ein Epimorphismus: Wegen (4.1) läßt sich jedes Erzeugende von  $\pi_1 P X$  in der Form  $i x$  ( $x \in X_1$ ) darstellen und es ist nur dann nicht Bild eines Erzeugenden von  $\pi_1 X$ , wenn  $x$  entartet ist; dann kann man aber dieses  $i x$  nach (4.2) vernachlässigen.

$i_{\mathfrak{x}}$  ist ein Monomorphismus: Der von  $p X$  induzierte Homomorphismus  $\pi_1 p X: \pi_1 P X \rightarrow \pi_1 X$  ist ein Linksinverses zu  $i_{\mathfrak{x}}$ . Also ist  $i_{\mathfrak{x}}$  ein Isomorphismus, damit aber auch  $\pi_1 p X$ .

**Lemma 2.** *Ist  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung von  $X$ , so ist  $Pp: P\tilde{X} \rightarrow P X$  eine universelle Überlagerung von  $P X$ .*

*Beweis.* Wegen Lemma 1 genügt es wieder (vgl. 2.5 Satz 2) die Überlagerungsbedingung nachzurechnen.

Dazu sei  $\mathfrak{x} \in P X$ ,  $\tilde{\mathfrak{z}} \in (P\tilde{X})_0$  und

$$Pp \tilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x} \varepsilon_k \quad \text{für ein } k \in [\dim \mathfrak{x}]. \quad (4.3)$$

Es ist zu zeigen, daß genau ein  $\tilde{\mathfrak{x}} \in P\tilde{X}$  mit

$$Pp \tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}, \quad \tilde{\mathfrak{x}} \varepsilon_k = \tilde{\mathfrak{z}} \quad (4.4)$$

existiert.

Dabei sei  $(x, \mu)$  das  $\Delta$ -Paar mit surjektivem  $\mu$  in  $\mathfrak{x}$  und  $\tilde{z} \in \tilde{X}_0$  sei gegeben durch

$$\tilde{\mathfrak{z}} = (\tilde{z}, \text{id}[0]).$$

Beachtet man

$$\mu \varepsilon_k = \varepsilon_{\mu(k)},$$

so folgt aus (4.3) und der Eindeutigkeitsaussage des Lemmas in 3.2

$$p \tilde{z} = x \varepsilon_{\mu(k)}.$$

Sei nun  $\tilde{\mathfrak{x}}$  das eindeutig bestimmte Simplex in  $\tilde{X}$ , für das gilt:

$$p \tilde{\mathfrak{x}} = x, \quad \tilde{\mathfrak{x}} \varepsilon_{\mu(k)} = \tilde{z}.$$

( $\tilde{\mathfrak{x}}$  existiert eindeutig, da  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung ist.)

Dann werden die Gln. (4.4) von

$$\tilde{\mathfrak{x}} = (\tilde{x}, \mu)$$

erfüllt; die Eindeutigkeit dieser Lösung ist trivial.

**Lemma 3.** *Für jede semisimpliziale Menge  $X$  induziert  $p X: P X \rightarrow X$  Isomorphismen der Homologiegruppen.*

*Beweis.* Sei  $C'(X)$  der von Lamotke in [12] V 1 definierte Kettenkomplex von  $X$ .  $C(P X)$  bzw.  $C(X)$  seien die normalisierten Kettenkomplexe von  $P X$  bzw.  $X$ . Die von  $p X$  induzierte Kettenabbildung  $p X_{\#}: C(P X) \rightarrow C(X)$  faktorisiert über die natürliche Projektion  $C'(X) \rightarrow C(X)$ . Die induzierte Kettenabbildung  $C(P X) \rightarrow C'(X)$  ist ein Isomorphismus der Kettenkomplexe, die natürliche Projektion  $C'(X) \rightarrow C(X)$  induziert Isomorphismen der Homologie, also induziert auch  $p X$  Isomorphismen der Homologie.



**Satz.** Für jede semisimpliziale Menge  $X$  ist  $pX$  eine schwache Homotopieäquivalenz.

*Beweis.*  $\pi_1 pX$  ist nach Lemma 1 ein Isomorphismus.

Ist  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  universelle Überlagerung, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P\tilde{X} & \xrightarrow{p\tilde{X}} & \tilde{X} \\ Pp \downarrow & & \downarrow p \\ PX & \xrightarrow{pX} & X \end{array}$$

kommutativ, da  $\mathcal{P}$  eine natürliche Transformation ist. Aus Lemma 2 folgt, daß  $p\tilde{X}$  universelle Überlagerung von  $pX$  ist. Dann folgt der Satz aus Lemma 3.

*Bemerkung.* Ist  $X$  eine semisimpliziale Menge, so ist  $|PX|$  der topologische Raum, den Giever (in [7]) und Hu (in [9]) als geometrische Realisierung von  $X$  bezeichnen. Die zu unserem Satz äquivalente Behauptung, daß  $|pX|$  eine Homotopieäquivalenz ist, stellt bereits Kodama (in [11]) auf. Sein Beweis ist aber unvollständig, da er die Homöomorphie von  $|X|$  und  $|\Delta' X|$  voraussetzt, die unseres Wissens in [3] zum ersten Mal bewiesen wurde ( $\Delta' X$  bezeichnet die Normalunterteilung, d.h. die von  $\Delta' -$  s. 1.3 – induzierte Unterteilung von  $X$ ).

### 3.5. Unterteilung nicht entarteter semisimplizialer Mengen

Ist  $U$  ein Standard-Unterteilungsfunktor und  $X$  eine nicht entartete semisimpliziale Menge, so sind  $|X|$  und  $|UX|$  nach 2.3 Satz 1 und 2.4 Satz 2 homöomorph. Es gilt sogar der

**Satz.**  $|UE?|$  und  $|E?|$  sind natürlich äquivalent (wie in 3.3 bedeutet  $E: \underline{P} \rightarrow \underline{S}$  die Einbettung).

*Beweis.* Wir haben zu jeder nicht entarteten semisimplizialen Menge  $X$  einen Homöomorphismus  $hX: QX \rightarrow |X|$  (Definition von  $QX$  s. 2.3) zu konstruieren, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{hX} & |X| \\ |Uf| \downarrow & & \downarrow |f| \\ QY & \xrightarrow{hY} & |Y| \end{array}$$

für jede nicht entartete semisimpliziale Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  kommutativ ist.

Wir bemerken dazu, daß  $QX$  aus  $\mathfrak{F}^+ X$  vermöge der Äquivalenzrelation

$$(x\alpha, v) \sim (x, |U\alpha|v) = (x, |\Delta\alpha|v)$$

für  $x \in X_n^+$ ,  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{A}$  und injektiv,  $v \in \Delta_m$  entsteht und  $f$  als nicht entartete semisimpliziale Abbildung eine mit dieser Äquivalenzrelation verträgliche, stetige Abbildung

$$f^+: \mathfrak{F}^+ X \rightarrow \mathfrak{F}^+ Y$$

induziert. Dann ist die Konstruktion von  $hX$  klar.

3.6. Der Homotopietyp von  $U X$ 

Sei  $U$  ein Standard-Unterteilungsfunktor.

**Satz.** Es gibt eine Familie

$$u = (u X / X \in |\underline{S}|)$$

von Homotopieäquivalenzen

$$u X: |U X| \rightarrow |X|,$$

so daß für jede semisimpliziale Abbildung  $f: X \rightarrow Y (X, Y \in |\underline{S}|)$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |U X| & \xrightarrow{u X} & |X| \\ |U f| \downarrow & & \downarrow |f| \\ |U Y| & \xrightarrow{u Y} & |Y| \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist.

*Beweis.* Wir wählen zu jeder semisimplizialen Menge  $X$  ein Homotopieinverses  $u_2 X: |U X| \rightarrow |U P X|$  zu  $|U p X|$  ( $|U p X|$  ist nach den Sätzen in 3.4 und 2.7 eine Homotopieäquivalenz!).

Dann ist

$$u = (|p X| \cdot h P X \cdot u_2 X = u X / X \in |\underline{S}|)$$

eine Familie mit den gewünschten Eigenschaften (h wie in 3.5).

## § 4. Natürliche Transformationen

## 4.1. Allgemeines

Das Ergebnis von 3.6 legt die Frage nahe, ob sich in dem dort auftretenden Diagramm immer sogar strenge Kommutativität erreichen läßt, d.h. ob es zu jeder Unterteilung  $U_{\underline{S}}$  eine natürliche Transformation  $|U_{\underline{S}}?| \rightarrow |?|$  gibt, derart daß für jede semisimpliziale Menge  $X$  die zugeordnete Abbildung  $|U X| \rightarrow |X|$  eine Homotopieäquivalenz ist.

Diese Frage wollen wir jetzt untersuchen. Die beiden folgenden Sätze reduzieren das Problem.

**Satz 1.** Sei  $U$  ein Standard-Unterteilungsfunktor. Die natürlichen Transformationen  $|U?| \rightarrow |\Delta?|$  und  $|U_{\underline{S}}?| \rightarrow |?|$  entsprechen sich eineindeutig.

*Beweis.* Die Einschränkung einer über  $\underline{S}$  definierten natürlichen Transformation auf  $\underline{\Delta}$  liefert  $|U?| \rightarrow |\Delta?|$ . Die Umkehrung folgt mit Hilfe von 2.3 Satz 1.

**Satz 2.** Ist

$$t = (t X: |U X| \rightarrow |X| / X \in |\underline{S}|)$$

eine natürliche Transformation, so ist  $t X$  für jede semisimpliziale Menge  $X$  eine Homotopieäquivalenz.

*Beweis.* Aus der Natürlichkeit folgt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} |UPX| & \xrightarrow{tPX} & |PX| \\ |UpX| \downarrow & & \downarrow |pX| \\ |UX| & \xrightarrow{tX} & |X| \end{array}$$

für jede semisimpliziale Menge  $X$ . Da nach 3.4 und 2.7 in den Senkrechten dieses Diagrammes Homotopieäquivalenzen stehen, ergibt sich die Behauptung aus der Tatsache, daß  $tPX$  homotop zu dem natürlichen Homöomorphismus  $hPX: |UPX| \rightarrow |PX|$  (vgl. 3.5) ist. Setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$t_n = t\Delta[n] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so induziert die Zuordnung

$$\langle x, u \rangle \mapsto |x, (1-s)u + s t_n u|$$

(definiert für alle  $x \in (PX)_n^+$ ,  $u \in \Delta_n$  und  $s \in I$ ) die gewünschte Homotopie von  $hPX$  nach  $tPX$ .

Wir können uns damit zur Beantwortung der eingangs gestellten Frage auf die Untersuchung von Standard-Unterteilungsfunktoren beschränken.

#### 4.2. Beispiele

Ist  $U$  ein Standard-Unterteilungsfunktor, so induziert jede natürliche Transformation  $U \rightarrow \Delta$  eine natürliche Transformation  $|U?| \rightarrow |\Delta?|$ . Hierher gehört die bekannte natürliche Transformation  $\Delta' \rightarrow \Delta$  (vgl. 1.3), die beschrieben werden kann durch

$$\begin{aligned} \Delta'[p] \ni \mu = (\mu_0, \dots, \mu_n) &\mapsto (\beta: [n] \rightarrow [p]) \in \Delta[p] \\ i &\mapsto \mu_i(\dim \mu_i). \end{aligned}$$

Betrachtet man  $r$ -Äquivalenzklassen ( $r \in \mathbb{N}$ ) in  $\Delta'[p]$  (vgl. 1.5b), so stellt man fest, daß diese Festsetzung unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten ist. Damit erhält man auch eine natürliche Transformation  $U_r \rightarrow \Delta$ .

Für die natürliche Unterteilung  $\Delta^\vee$  (vgl. 1.4) liefert die Festsetzung

$$\begin{aligned} \Delta^\vee[p] \ni \mu = ((a_0, b_0), \dots, (a_n, b_n)) &\mapsto (\beta: [n] \rightarrow [p]) \\ i &\mapsto b_i \end{aligned}$$

eine natürliche Transformation.

#### 4.3. Ein Hilfssatz

Wir benötigen im folgenden häufig einen fast trivialen, aber oft nicht beachteten

**Hilfssatz.**  $V$  sei ein topologischer Raum,  $f, g: V \rightarrow \Delta_n$  seien stetige Abbildungen;  $i_0, i_1$  seien verschiedene Elemente von  $[n-1]$  und es gelte

$$|\Delta \sigma_{i_e}| \circ f = |\Delta \sigma_{i_e}| \circ g \quad \text{für } e=0, 1.$$

Dann ist

$$f = g.$$

(Anders ausgedrückt: Eine stetige Abbildung  $f: V \rightarrow \Delta_n$  ist durch

$$(|\Delta \sigma_{i_e}| \circ f/e = 0, 1)$$

eindeutig bestimmt.)

*Beweis.* Wegen  $i_0 \neq i_1$  ist die Abbildung

$$\Delta_n \rightarrow \Delta_{n-1} \times \Delta_{n-1},$$

die gegeben ist durch

$$t \mapsto (\Delta \sigma_{i_0} t, \Delta \sigma_{i_1} t)$$

injektiv; außerdem egalisiert sie  $f$  und  $g$ .

*Bemerkung.* Allgemein gebräuchlich ist die „duale“ Aussage, bei der „Rechtskürzung“ durch injektive Abbildungen erfolgt, deren Bilder ihr gemeinsames Ziel überdecken.

#### 4.4. Existenz und Eindeutigkeit

Sei  $U$  ein Standard-Unterteilungsfunktor.

**Satz 1.** Jede natürliche Transformation

$$t = (t_n: |U[n]| \rightarrow |\Delta[n]|/n \in \mathbf{N})$$

ist durch  $t_1$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  gilt

$$|\Delta \sigma_e| \circ t_{n+1} = t_n \circ |U \sigma_e| \quad \text{für } e = 0, n.$$

Ist also  $n > 0$ , so folgt aus 4.3, daß  $t_{n+1}$  durch  $t_n$  eindeutig bestimmt ist.

**Satz 2.** Sind  $t'_n: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  ( $n \in [2]$ ) stetige Abbildungen, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta_m & \xrightarrow{t'_m} & \Delta_m \\ |U \alpha| \downarrow & & \downarrow |\Delta \alpha| \\ \Delta_n & \xrightarrow{t'_n} & \Delta_n \end{array} \quad (4.1)$$

für alle  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  aus  $\underline{\Delta}$  mit  $m, n \in [2]$  kommutativ ist, so gibt es eine natürliche Transformation

$$t = (t_n: |U[n]| \rightarrow |\Delta[n]|/n \in \mathbf{N})$$

mit

$$t'_n = t_n \quad \text{für alle } n \in [2]. \quad (4.2)$$

*Beweis.* Wir konstruieren die  $t_n$  induktiv. Die Definition von  $t_0, t_1, t_2$  ist wegen (4.2) klar. Wir nehmen nun an, daß wir die  $t_n$  bereits bis zu einem  $l \geq 2$  konstruiert haben, so daß für alle  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  mit  $m, n \in [l]$  das zu (4.1) analoge Diagramm kommutativ ist. Dann definieren wir zunächst eine stetige Abbildung  $t'_{l+1}: \Delta_{l+1} \rightarrow \mathbf{R}^{l+2}$  durch die Festsetzung

$$t'_{l+1} = |\Delta \delta_{l+1}| \circ t_l \circ |U \sigma_l| + |\Delta \delta_0| \circ (\text{id } \Delta_l - |\Delta \delta_l \sigma_{l-1}|) \circ t_l \circ |U \sigma_0| \quad (4.3)$$

und zeigen

$$\text{Bild } t'_{l+1} \subset \mathcal{A}_{l+1}. \quad (4.4)$$

Dazu sei  $u \in \mathcal{A}_{l+1}$ . Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \bar{u} &= t'_{l+1} u, \\ v &= (t_l \circ |U \sigma_l|) u, \\ w &= (t_l \circ |U \sigma_0|) u. \end{aligned}$$

Die euklidischen Koordinaten von  $\bar{u}$  ergeben sich dann aus (4.3) zu

$$\bar{u}_i = \begin{cases} v_i & \text{für } 0 \leq i < l \\ v_l - w_l & \text{für } i = l \\ w_l & \text{für } i = l + 1. \end{cases}$$

Also genügt es zum Nachweis von (4.4) zu zeigen:

$$v_l - w_l \geq 0. \quad (4.5)$$

Wir fassen nun  $|\Delta \sigma_0|$  als lineare Abbildung von  $\mathbf{R}^{l+2}$  nach  $\mathbf{R}^{l+1}$  auf und berechnen aus (4.3):

$$|\Delta \sigma_0| \circ t'_{l+1} = t_l \circ |U \sigma_0| + |\Delta \sigma_0 \delta_{l+1}| \circ t_l \circ |U \sigma_l| - |\Delta \delta_l \sigma_{l-1}| \circ t_l \circ |U \sigma_0|;$$

hier heben sich die beiden letzten Terme gegenseitig auf, weil nach Induktionsvoraussetzung

$$|\Delta \sigma_{l-1}| \circ t_l \circ |U \sigma_0| = t_{l-1} \circ |U \sigma_{l-1} \sigma_0| = t_{l-1} \circ |U \sigma_0 \sigma_l| = |\Delta \sigma_0| \circ t_l \circ |U \sigma_l|$$

und außerdem

$$\sigma_0 \delta_{l+1} = \delta_l \sigma_0$$

gilt. Also haben wir

$$|\Delta \sigma_0| \circ t'_{l+1} = t_l \circ |U \sigma_0|. \quad (4.6)$$

Setzen wir darin  $u$  ein, so haben wir

$$|\Delta \sigma_0| \bar{u} = w \in \mathcal{A}_l;$$

aus  $l \geq 2$  (!) folgt aber, daß die  $(l-1)$ -te euklidische Koordinate von  $|\Delta \sigma_0| \bar{u}$  gleich der  $l$ -ten euklidischen Koordinate von  $\bar{u}$  ist, das ergibt

$$v_l - w_l = w_{l-1} \geq 0. \quad (4.7)$$

Damit sind (4.5) und (4.4) bewiesen und  $t'_{l+1}$  induziert in kanonischer Weise eine Abbildung

$$t_{l+1}: \mathcal{A}_{l+1} \rightarrow \mathcal{A}_{l+1},$$

für die natürlich auch (4.3) und (4.6) sinngemäß gelten.

Wir zeigen nun, daß für alle  $k \in [l]$  gilt

$$|\Delta \sigma_k| \circ t_{l+1} = t_l \circ |U \sigma_k|. \quad (4.8)$$

Für  $k=0$  folgt das unmittelbar aus (4.6); für  $0 < k < l$  berechnen wir aus (4.3) ähnlich zu den obigen Rechnungen

$$|\Delta \sigma_k| \circ t_{l+1} = (|\Delta \delta_l \sigma_{l-1}| + |\Delta \delta_0 \sigma_0| - |\Delta \delta_0 \sigma_0 \delta_l \sigma_{l-1}|) \circ t_l \circ |U \sigma_k|.$$

Daraus ergibt sich (4.8) wegen

$$|\Delta \delta_l \sigma_{l-1}| + |\Delta \delta_0 \sigma_0| - |\Delta \delta_0 \sigma_0 \delta_l \sigma_{l-1}| = \text{id } \Delta_l. \quad (4.9)$$

Für  $k=l$  beachten wir

$$\sigma_l \delta_0 = \delta_0 \sigma_{l-1}, \quad \sigma_{l-1} \delta_l \sigma_{l-1} = \sigma_{l-1};$$

daraus und aus (4.3) erhalten wir (4.8).

Es bleibt zu zeigen, daß für alle  $k \in [l+1]$  gilt

$$t_{l+1} \circ |U \delta_k| = |\Delta \delta_k| \circ t_l. \quad (4.10)$$

Für  $k=0, l+1$  folgt das direkt durch Umformungen von (4.3); sei nun  $0 < k \leq l$ . Dann haben wir:

$$\begin{aligned} & |\Delta \sigma_0| \circ t_{l+1} \circ |U \delta_k| && \text{nach (4.8)} \\ &= t_l \circ |U \sigma_0 \delta_k| = t_l \circ |U \delta_{k-1} \sigma_0| && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= |\Delta \delta_{k-1}| \circ t_{l-1} \circ |U \sigma_0| \\ &= |\Delta \delta_{k-1} \sigma_0| \circ t_l = |\Delta \sigma_0| \circ |\Delta \delta_k| \circ t_l \end{aligned}$$

und analog:

$$|\Delta \sigma_l| \circ t_{l+1} \circ |U \delta_k| = |\Delta \sigma_l| \circ |\Delta \delta_k| \circ t_l;$$

nach 4.3 ergibt sich daraus (4.10).

(4.8) und (4.10) zusammen liefern den Induktionsschritt.

**Bemerkung.** Die einzige Stelle des vorangehenden Beweises, an der benutzt wird, daß  $t'_2$  vorgegeben ist, ist der Beweis von (4.5). Damit ist klar, wie wir weiter vorgehen werden: Wir suchen Bedingungen für  $t'_1$ , so daß (4.5) erfüllt ist. Genauer können wir formulieren:

**Lemma.** Eine stetige Abbildung  $t_1: \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$  induziert genau dann eine (und wegen Satz 1 nur eine) natürliche Transformation  $|U?| \rightarrow |\Delta?|$ , wenn

$$t_1(1, 0) = (1, 0), \quad t_1(0, 1) = (0, 1)$$

und für jeden Punkt  $u \in \Delta_2$  die 1-te euklidische Koordinate von  $(t_1 \circ |U \sigma_1|)u$  größer – gleich der 1-ten euklidischen Koordinate von  $(t_1 \circ |U \sigma_0|)u$  ist.

Der Beweis dieses Lemmas ist nach dem Vorhergehenden klar.

Die stetigen Abbildungen von  $\Delta_1$  nach  $\Delta_1$  entsprechen umkehrbar eindeutig den stetigen Funktionen von  $I$  nach  $I$ . Wir denken uns die Entsprechung durch den Homöomorphismus  $\Delta_1 \rightarrow I$  hergestellt, der durch die Zuordnung

$$(u_0, u_1) \mapsto u_1$$

gegeben ist. Dann ist klar, was die Ausdrucksweise „die stetige Funktion  $t: I \rightarrow I$  induziert eine natürliche Transformation“ bedeuten soll.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von natürlichen Transformationen enthält der

**Satz 3.** *Ist für jedes  $u \in \Delta_2$  die 1-te euklidische Koordinate von  $|U \sigma_0|u$  kleiner – gleich der 1-ten euklidischen Koordinate von  $|U \sigma_1|u$ , so induziert jede surjektive, (schwach) monotone, stetige Funktion  $t: I \rightarrow I$  eine natürliche Transformation.*

Der Beweis ist trivial.

*Bemerkungen.* a) Satz 1 liefert natürlich auch: Jede natürliche Transformation  $U \rightarrow \Delta$  ist durch ihren „Wert an der Stelle [1]“ bestimmt.

b) Die von uns als Beispiele erwähnten Standard-Unterteilungsfunkoren erfüllen alle die Voraussetzungen von Satz 3. Es gibt also außer den in 4.2 beschriebenen noch weitere stetige (!) natürliche Transformationen. Es ist ganz nützlich, sich klar zu machen, welche Transformation  $t = \text{id } I$  bei der Normalunterteilung induziert: Es handelt sich dabei (nach den notwendigen Identifizierungen) um die geometrische Realisierung der natürlichen Transformation  $\Delta' \rightarrow \Delta^\vee$  (s. 1.3 und 1.4), die gegeben ist durch:

$$\Delta'[p] \ni \mu = (\mu_0, \dots, \mu_n) \mapsto ((\mu_0(0), \mu_0(\dim \mu_0)), \dots, (\mu_n(0), \mu_n(\dim \mu_n))) \in \Delta^\vee[p].$$

c) Gibt es eine natürliche Transformation  $|U?] \rightarrow |\Delta?|$ , so gibt es unendlich viele: Hat man ein  $t_1: I \rightarrow I$ , das eine natürliche Transformation induziert, so induziert auch  $t \circ t_1$  eine solche, wenn  $t$  eine beliebige surjektive, (schwach) monotone, stetige Funktion  $I \rightarrow I$  ist. Das folgt unmittelbar aus dem angegebenen Lemma.

#### 4.5. Natürliche Transformationen $|?] \rightarrow |U?|$

Der Vollständigkeit halber bemerken wir, daß für natürliche Transformationen  $|?] \rightarrow |U?|$  die Ausführungen in 4.1 analog gelten. Allerdings wissen wir nicht, ob es überhaupt nichttriviale Beispiele für solche Transformationen gibt. Ist nämlich  $U$  ein von  $\Delta$  verschiedener Standard-Unterteilungsfunktor, so ist klar, daß eine natürliche Transformation  $|\Delta?] \rightarrow |U?|$  nicht von einer natürlichen Transformation  $\Delta \rightarrow U$  herkommen kann. Ist  $U$  ein Standard-Unterteilungsfunktor, bei dem Formel (1.1) aus §1 für alle  $\gamma \in \underline{\Delta}$  gilt, also z.B. die natürliche Unterteilung, so bilden zwar die Umkehrungen der identifizierenden Homöomorphismen  $|U[p]| \rightarrow \Delta_p = |\Delta[p]|$  eine natürliche Transformation der gewünschten Art; aber das ist wegen 2.4, Satz 1 auch eine triviale Feststellung.

Die Überlegungen aus 4.4 können wir nicht übertragen, da wir ein Hilfsmittel wie 4.3 nicht zur Verfügung haben. Man kann auch die  $|\cup \sigma_i|$  nur in Ausnahmefällen als lineare Abbildungen interpretieren.

### Literatur

1. Barratt, M. G.: *Simplicial and semisimplicial complexes*. Vervielfältigtes Manuskript, Princeton 1956.
  2. Feuerbach, K. W.<sup>4</sup>: *Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide*. Ansbach-Nürnberg: In Commission bei Riegel und Wiesner 1827.
  3. Fritsch, R.: *Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen*, Dissertation, Saarbrücken 1968.
  4. — *Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen*. II. Erscheint in der *Math. Z.*
  5. —, u. D. Puppe: Die Homöomorphie der geometrischen Realisierungen einer semisimplizialen Menge und ihrer Normalunterteilung. *Arch. Math.* **18**, 508–512 (1967).
  6. Gabriel, P., et M. Zisman: *Fondements de la Topologie Simpliciale*. Vervielfältigtes Manuskript, Straßburg 1965. Außerdem erschienen als Band 35 der *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete unter dem Titel: Calculus of fractions and homotopy theory*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
  7. Giever, J. B.: On the equivalence of two singular homology theories. *Ann. Math.* **51**, 178–190 (1950).
  8. Hilton, P., and S. Wylie: *Homology theory*. Cambridge: University Press 1960.
  9. Hu, S.: On the realizability of homotopy groups and their operations. *Pacific J. Math.* **1**, 583–602 (1951).
  10. Kan, D. M.: On *css*-complexes. *Amer. J. Math.* **79**, 449–476 (1957).
  11. Kodama, Y.: A relation between two realizations of complete semi-simplicial complexes. *Proc. Japan Acad.* **33**, 536–540 (1957).
  12. Lamotke, K.: *Semisimpliziale algebraische Topologie*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
  13. Milnor, J.: The geometric realization of a semisimplicial complex. *Ann. Math.* **65**, 357–362 (1957).
  14. Puppe, D.: Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. I. *Math. Z.* **68**, 367–406 (1958).
  15. Schubert, H.: *Topologie*. Stuttgart: B. G. Teubner 1964.
  16. Seifert, H., u. W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner 1934.
  17. Whitehead, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. *Bull. AMS* **55**, 213–245 (1949).
4. Karl Wilhelm Feuerbach (30. 5. 1800 – 12. 3. 1834) ist ein Sohn des Juristen Anselm F., ein Bruder des Philosophen Ludwig F. und ein Onkel des Malers Anselm F.

Dr. Rudolf Fritsch  
6602 Dudweiler (Saar), Herderstraße 3

(Eingegangen am 17. Juli 1968)